



**Современный
Гуманитарный
Университет**

Дистанционное образование

0659.02.01;1

9

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ЮНИТА 2

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ЧАСТЬ II

МОСКВА 2001

Рекомендовано Министерством общего
и профессионального образования
Российской Федерации в качестве
учебного пособия для студентов
высших учебных заведений

КУРС: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Юнита 1. Линейная алгебра. Часть I.

Юнита 2. Линейная алгебра. Часть II.

ЮНИТА 2

Рассматриваются линейные пространства, линейные операторы, действующие в линейных пространствах, их матрицы, собственные векторы и собственные значения, квадратичные формы, их матрицы, их виды и приведение квадратичных форм к каноническому виду.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета

Юнита соответствует профессиональной образовательной программе № 1

0659.002.02.99.01; 1/07.13.Тир.4000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН	4
ЛИТЕРАТУРА	5
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР	6
Глава 1. Линейные пространства	6
§1. Определение и примеры	6
§2. Арифметическое пространство R^n	7
§3. Подпространство	8
§4. Базис, координаты вектора	12
§5. Евклидово пространство	18
§6. Ортонормированный базис	20
§7. Проекция вектора на подпространство	25
§8. Метод наименьших квадратов для переопределенной системы	26
Глава 2. Линейные операторы	28
§1. Определение и примеры	28
§2. Матрица линейного оператора	29
§3. Общий вид линейного оператора в линейном пространстве	29
§4. Матрица перехода	31
§5. Самосопряженный оператор	32
Глава 3. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов	38
§1. Определение и примеры	38
§2. Характеристический многочлен и его корни	39
§3. Алгоритм вычисления собственных векторов линейного оператора	47
§4. Собственные векторы и собственные числа симметрического оператора	50
§5. Базис из собственных векторов самосопряженного оператора	52
Глава 4. Квадратичные формы	53
§1. Определение	53
§2. Матрица квадратичной формы	54
§3. Канонический вид	55
§4. Приведение к каноническому виду	56
§5. Положительно и неотрицательно определенные квадратичные формы	60
§6. Критерий Сильвестра	61
§7. Закон инерции	64
Приложение	67
§1. Итерационный метод для вычисления максимального (минимального) собственного значения матрицы	67
§2. Гессиан	67
§3. Локальный экстремум функции нескольких переменных	69
ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ	71
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ	87
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ	90
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	132
ГЛОССАРИЙ*	

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Линейные пространства. Аксиомы линейного пространства и операции в нем. Свойства линейного пространства. Векторы линейного пространства. Линейная комбинация векторов. Линейная независимость векторов. Свойства систем векторов. Линейная оболочка системы векторов. Базис линейного пространства. Разложение векторов по базису. Линейные операции в координатной форме. Размерность линейного пространства. Подпространства и их свойства. Евклидово пространство. Скалярное произведение двух векторов. Ортогональность векторов. Ортонормированный базис. Неравенство Коши-Буняковского. Процесс ортогонализации базиса. Матрица Грама.

Линейные операторы. Матрица линейного оператора в базисе линейного пространства. Матрица перехода от старого базиса к новому базису. Сопряженные операторы. Самосопряженные операторы и их матрицы. Симметрическая матрица. Ортогональная матрица. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. Характеристический многочлен матрицы A и его корни. Характеристическое уравнение. Собственные векторы и собственные числа самосопряженного оператора. Собственное подпространство. Базис из собственных векторов самосопряженного оператора.

Квадратичные формы. Линейная форма на линейном пространстве. Билинейная и квадратичная формы. Матрица квадратичной формы. Координатная запись квадратичной формы. Канонический вид квадратичной формы. Положительно определенная и неотрицательно определенные квадратичные формы. Необходимое и достаточное условие положительной определенности квадратичной формы. Теорема о сохранении числа положительных, отрицательных и ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы. Численный метод определения максимального собственного значения матрицы. Функциональные определители, Гессеиан.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

1. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. 4-е изд., доп. М.: Наука, 1971.

*2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. 2-е изд. М.: Наука, 1978.

Дополнительная

*3. Красовская И. А. Элементы линейной алгебры. Юнита 1. М.: СГУ, 1997.

*4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 6-е изд., стереотип. М.: Наука, 1984.

*5. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра. М.: МГТУ, 1998.

6. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.

7. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.

*8. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975.

9. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. 5-е изд. М.: Наука, 1974.

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. Определение и примеры

В данном разделе будут рассмотрены объекты произвольной природы: точки, матрицы, многочлены, векторы, функции и т.д.

Множество V элементов $u, v, w, \dots$ произвольной природы, в котором определены операции сложения ($u + v, u, v \in V$) и умножения на число (αv , где α – число, $v \in V$), подчиняющиеся определенным аксиомам, называется **линейным пространством**. Элементы произвольного линейного пространства V часто называют векторами.

Указанные операции над векторами подчиняются следующим аксиомам:

а) $u + v = v + u$ – это свойство операции сложения векторов линейного пространства V называется **коммутативностью сложения векторов**;

б) $(u + v) + w = u + (v + w)$ – это свойство операции сложения называется **ассоциативностью сложения векторов**;

в) существует нулевой элемент 0 такой, что $u + 0 = u$ для любого элемента u множества;

г) для каждого элемента u существует противоположный элемент $(-u)$ такой, что $u + (-u) = 0$;

д) для любого элемента u справедливо равенство $1 \cdot u = u$;

е) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu) u$;

ж) $(\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u$;

з) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, где λ, μ – числа.

Приведем примеры таких пространств.

Пример 1.1. Множество V_3 свободных векторов в трехмерном пространстве. Операцией сложения является операция сложения двух векторов, в результате которой получается вектор из этого же множества, а операцией умножения на число – операция умножения вектора на число α , в результате которой получается коллинеарный вектор множества V_3 , “удлиненный” в α раз. Операции над векторами сводятся к операциям над действительными числами (координатами вектора), для сложения и умножения которых аксиомы а, б, г, е, ж, з выполняются. В качестве нулевого элемента в этом множестве можно взять нулевой вектор, а в качестве элемента $(-u)$ вектор, имеющий равную с вектором u длину и противоположно ему направленный.

Пример 1.2. Множество всех вещественных матриц размерности $m \times n$ также является линейным пространством. Операции сложения и умножения на число элементов этого пространства соответствуют операциям сложения двух матриц и умножению матрицы на число. В этом множестве нулевая матрица будет нулевым элементом. Матрица, полученная из матрицы A умножением всех ее элементов на число (-1) , будет являться для матрицы A противоположным элементом. Остальные аксиомы выполняются, так как они

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

сводятся к операциям над числами (элементами матриц), для которых верны [3, с. 31-34].

Пример 1.3. Множество решений системы m линейных однородных уравнений с n неизвестными, если ранг ее меньше числа неизвестных, является линейным пространством. Каждое из решений системы является вектором размерности n . Согласно [3, с.45 – 46], сумма двух векторов-решений и произведение вектора-решения на число также являются решениями системы. Нуль-вектор также является решением, а противоположный вектор получается умножением вектора-решения на число (-1) и, следовательно, также является решением системы однородных уравнений.

Пример 1.4. Множество всех многочленов степени, не превышающей натурального числа n с операциями сложения многочленов и умножения их на число – линейное пространство, в котором нулевым элементом является многочлен со всеми нулевыми коэффициентами, а противоположный элемент для каждого многочлена получается его умножением на число (-1) . Действительно, многочлен степени не выше n является алгебраической суммой нескольких одночленов, каждый из которых есть произведение, составленное из числового множителя и буквы в степени: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Операции сложения и умножения на число многочленов сводятся к операциям над числами, являющимися коэффициентами (множителями) при соответствующих степенях букв.

Пример 1.5. Множество всех функций $y = f(x)$, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$, для которых обычными правилами математического анализа определены операции сложения таких функций и умножения их на число, является линейным пространством. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a, b]$, тогда их сумма $f(x) + g(x) = h(x)$ – определенная и непрерывная во всех точках отрезка $[a, b]$ функция [4]. Аналогично, при умножении функции на любое число получаем функцию, определенную и непрерывную на отрезке $[a, b]$, то есть принадлежащую рассматриваемому множеству. В качестве нулевого элемента в этом множестве берем функцию, имеющую значение нуль во всех точках отрезка $[a, b]$, т.е. $y=0$ – часть оси Ox , а именно отрезок $a \leq x \leq b$. Противоположным элементом для функции $f(x)$ будет функция $-f(x)$. Остальные аксиомы будут выполняться в силу того, что все операции над функциями сводятся в каждой конкретной точке отрезка к операциям над числами, для которых эти аксиомы верны. Следовательно, совокупность функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с обычными операциями сложения функций и умножения функций на число, является линейным пространством, которое называют **пространством непрерывных функций на отрезке $[a, b]$** и обозначают $C_{[a, b]}$.

119 §2. Арифметическое пространство R^n

Рассмотрим множество R^n , элементами которого являются упорядоченные наборы $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ произвольных действительных чисел. Введем операцию сложения для двух наборов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ по правилу $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ и операции умножения набора на число

$\alpha: \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$. Для данного множества R^n с введенными операциями выполняются все аксиомы линейного пространства, поскольку они выполняются для действительных чисел, составляющих наборы. Нулевым элементом в этом пространстве является набор $0 = (0, 0, \dots, 0)$, а противоположным для каждого набора служит набор, составленный из его чисел, умноженных на константу -1 : $(-x) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$. Линейное пространство R^n называют **арифметическим пространством R^n** . Наборы чисел называют векторами арифметического пространства R^n , числа, из которых состоит набор (вектор) – **компонентами вектора**. Элементы арифметического пространства R^2 можно представлять на плоскости векторами с соответствующими координатами, а элементы арифметического пространства R^3 – векторами в трехмерном пространстве. Ясно, что два вектора x и y будут равны тогда и только тогда, когда их одноименные компоненты совпадают. Это свойство является обобщением известного свойства для векторов на плоскости и в пространстве.

§3. Подпространство

В любом линейном пространстве V можно выделить такое подмножество векторов, которое относительно операций из V само является линейным пространством. **Подпространство W пространства V** – это непустое подмножество $W \subset V$ векторов, удовлетворяющих условию: если $x, y \in W \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W$, где α, β – действительные числа. Иначе говоря, применение линейных операций к векторам, принадлежащим этому подмножеству, не выводит результат за пределы подмножества. Покажем, что линейное подпространство W как самостоятельный объект является линейным пространством относительно операций, заданных в объемлющем линейном пространстве V . В самом деле, эти операции определены для любых элементов множества V , а значит, и для элементов подмножества W . Определение фактически требует, чтобы для элементов из W результат выполнения операций также принадлежал W . Поэтому операции, заданные в V , можно рассматривать как операции и на более узком множестве W . Для этих операций на множестве W аксиомы линейного пространства а) – б) и д) – з) выполнены в силу того, что они справедливы в V . Кроме того, выполнены и две оставшиеся аксиомы, поскольку, согласно определению подпространства, если $x \in W$, то:

- 1) $0 \cdot x = 0 \in W$ и 0 – нулевой вектор в W ;
- 2) $(-1)x = -x \in W$.

В любом линейном пространстве V всегда имеются два линейных подпространства: само линейное пространство V и нулевое подпространство $\{0\}$, состоящее из единственного элемента 0 . Эти линейные подпространства называют несобственными, а все остальные – собственными подпространствами. Приведем примеры собственных линейных подпространств.

Пример 1.6. В линейном пространстве V_3 свободных векторов трехмерного пространства линейное подпространство образуют: а) все векторы, параллельные заданной плоскости; б) все векторы, параллельные данной прямой. Это вытекает из следующих соображений. Из определения суммы свободных векторов [4] следует, что два вектора a, b и их сумма

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ принадлежат одной плоскости. Поэтому, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны некоторой заданной плоскости, то этой же плоскости будет параллельна их сумма. Если вектор умножить на число, получится вектор, параллельный исходному, а следовательно, параллельный заданной плоскости. Тем самым установлено, что для случая а) оба условия определения подпространства выполняются. Случай б) обосновывается аналогично.

Линейное пространство V_3 дает наглядное представление, что такое линейное подпространство. Если зафиксировать некоторую точку в пространстве, то различным плоскостям и различным прямым, проходящим через эту точку, будут соответствовать различные линейные подпространства из V_3 .

Пример 1.7. Любое решение однородной системы линейных алгебраических уравнений с n неизвестными можно рассматривать как вектор в линейном арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$. Множество всех таких векторов является линейным подпространством в $\mathbf{R}^n$. В самом деле, решения однородной системы уравнений можно складывать и умножать на действительные числа по правилам операций векторов из $\mathbf{R}^n$ и результат операции снова будет решением однородной системы уравнений. Значит, оба условия определения линейного подпространства выполнены.

Уравнение $x + 2y - z = 0$ имеет множество решений, состоящее из векторов $x, y, x + 2y$ (так как из уравнения получаем $z = x + 2y$) и являющееся линейным подпространством в $\mathbf{R}^n$.

Пример 1.8. В линейном пространстве квадратных матриц порядка n линейное подпространство образуют:

а) все симметрические матрицы [3, с. 35];

б) все верхние (нижние) треугольные матрицы [3, с. 31]. При сложении таких матриц или умножении на число получаем матрицу того же вида. Напротив, подмножество вырожденных матриц не является линейным подпространством, так как сумма двух вырожденных матриц может быть невырожденной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.9. В линейном пространстве $C_{[0,1]}$ функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$, можно выделить следующие линейные подпространства: а) множество функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$ и непрерывно дифференцируемых в интервале $(0,1)$ (в основе этого утверждения лежат свойства дифференцируемых функций: сумма дифференцируемых функций есть дифференцируемая функция, произведение дифференцируемой функции на число есть дифференцируемая функция); б) множество всех многочленов; в) множество всех многочленов степени не выше n . Напротив, множество всех монотонных функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$, очевидно, является подмножеством $C_{[0,1]}$, но не является линейным подпространством, так как сумма двух монотонных функций может и не быть монотонной функцией.

Из двух векторов $\mathbf{u} \in V$ и $\mathbf{v} \in V$ с помощью чисел α, β можно составить вектор $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \in V$, который называется **линейной комбинацией векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, принадлежащих пространству V** . Числа α и β являются коэффициентами линейной комбинации. Линейную комбинацию можно соста-

вить из набора, содержащего больше двух векторов: $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – действительные числа.

Совокупность векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$, для которых равенство $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ все равны нулю, называется **линейно независимой системой векторов**.¹⁴ Система векторов, не являющаяся линейно независимой, – линейно зависима.

Следующее утверждение дает критерий линейной независимости векторов. Если ни один из векторов системы не является линейной комбинацией остальных, то система векторов линейно независима.

Действительно, предположим, что система векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$ не является линейно независимой, тогда найдется число $\alpha_k \neq 0$ и из равенства $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$ получаем, что вектор $\mathbf{v}_k$ является линейной комбинацией остальных векторов системы:

$$\mathbf{v}_k = -\alpha_1/\alpha_k \mathbf{v}_1 - \alpha_2/\alpha_k \mathbf{v}_2 - \dots - \alpha_{k-1}/\alpha_k \mathbf{v}_{k-1} - \alpha_{k+1}/\alpha_k \mathbf{v}_{k+1} - \dots - \alpha_s/\alpha_k \mathbf{v}_s.$$

Это противоречит условию и противоречие возникло из предположения о линейной зависимости векторов системы. Следовательно, такая система векторов линейно независима.

Пример 1.10. В линейном пространстве $C_{[0,2\pi]}$ функций, непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$, рассмотрим функции $1, \sin^2 x, \cos 2x$. Система из этих трех элементов линейного пространства линейно зависима, поскольку в силу известной формулы тригонометрии функция $\sin^2 x = 0,5(1 - \cos 2x)$.

Непосредственно из аксиом линейного пространства можно получить ряд простейших свойств систем векторов произвольного линейного пространства V .

Свойство 1. Если среди векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ линейного пространства V есть нулевой вектор, то эта система векторов линейно зависима.

Пусть вектор $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Тогда линейная комбинация $1 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{v}_k$ содержит число $\alpha_1 = 1 \neq 0$, и в то же время, поскольку все ее слагаемые равны нулю, она равна нулевому вектору.

Свойство 2. Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима.

Доказывается аналогично предыдущему, поскольку все векторы, не содержащиеся в подсистеме, можно добавить в линейную комбинацию с нулевыми коэффициентами, что не изменит равенства ее нулевому вектору.

Свойство 3. Если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема тоже линейно независима.

Это свойство является переформулировкой предыдущего, так как система, имеющая линейно зависимую подсистему, не может быть сама линейно независимой. Поэтому у линейно независимой системы вообще не может быть линейно зависимых подсистем.

Свойство 4. Если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ линейного пространства V линейно независимы и вектор $\mathbf{y} \in V$ не является их линейной комбинацией, то расширенная система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{y}$ является линейно независимой.

Действительно, пусть $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{e}_m + \beta \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Тогда коэффициент β должен быть нулевым, так как в противном случае можно выразить вектор $\mathbf{y}$ через остальные. Но слагаемое $\beta \mathbf{y} = \mathbf{0}$ в равенстве слева можно опустить и

тогда получим, что линейная комбинация оставшихся векторов равна нулевому вектору, что противоречит заданному условию о их линейной независимости. Значит, исходная линейная комбинация не содержит ненулевых коэффициентов и расширенная система векторов является линейно независимой.

Пример 1.11. В линейном арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$ рассмотрим n векторов $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Докажем, что система из этих векторов линейно независима.

Так как для любых коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ линейная комбинация $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, то ясно, что она может быть равна нулевому вектору $(0, 0, \dots, 0)$ только при условии равенства нулю всех коэффициентов. По определению, это означает, что система векторов линейно независима.

Пример 1.12. Пусть в произвольном линейном пространстве V даны два вектора $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$ и пусть $\mathbf{x} = \mathbf{d}_1 - 2\mathbf{d}_2$, $\mathbf{y} = 2\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$, $\mathbf{z} = \mathbf{d}_1 + 3\mathbf{d}_2$. Тогда система векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ линейно зависима. Составим линейную комбинацию системы векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ с произвольными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и приравняем ее нулевому вектору: $\alpha_1 \mathbf{x} + \alpha_2 \mathbf{y} + \alpha_3 \mathbf{z} = \mathbf{0}$. В этой линейной комбинации заменим векторы их представлениями через векторы $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$, получим $\alpha_1 \mathbf{x} + \alpha_2 \mathbf{y} + \alpha_3 \mathbf{z} = \alpha_1(\mathbf{d}_1 - 2\mathbf{d}_2) + \alpha_2(2\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2) + \alpha_3(\mathbf{d}_1 + 3\mathbf{d}_2) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)\mathbf{d}_1 + (-2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3)\mathbf{d}_2$. Теперь достаточно приравнять нулю коэффициенты при векторах $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$, чтобы получить коэффициенты нулевой линейной комбинации. Итак, для определения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ получаем однородную систему линейных алгебраических

уравнений
$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$
. Как следует из теории решения систем

линейных алгебраических уравнений [3], указанная система всегда имеет ненулевое решение, поскольку ранг ее матрицы равен 2 и меньше 3 – количества неизвестных. Например, ненулевым решением является $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$. Значит, существуют такие $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, одновременно не равные нулю, что линейная комбинация векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ с этими коэффициентами равна нулевому вектору, то есть система векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ линейно зависима.

Пример 1.13. В линейном пространстве $C_{[0, 2\pi]}$ функций, непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$, рассмотрим функции $1, \cos x, \cos^2 x$. Система из этих трех функций линейно независима, так как при произвольном значении x равенство $a_1 + a_2 \cos x + a_3 \cos^2 x = 0$ выполняется только для нулевых значений постоянных a_i , $i = 1, 2, 3$.

Пример 1.14. В линейном пространстве многочленов любой степени не выше n [см. пример 1.4] система функций $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ является линейно независимой. Действительно, линейная комбинация, составленная из этих функций, представляет собой равенство нулю, которое должно выполняться при произвольном значении x : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$. А так как можно представить число 0 в виде многочлена $0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$, то получаем равенство двух многочленов одной и той же степени n при всех возможных значениях переменного x : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$. Следовательно, у этих многочленов должны совпадать коэффициенты при одинаковых степенях переменного x , т.е. $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$. Значит, система функций $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ линейно независима.

§4. Базис, координаты вектора

В линейном пространстве наибольший интерес представляют системы векторов, в виде линейной комбинации которых можно представить любой вектор, причем единственным образом. Если зафиксировать такую систему векторов, то любой вектор можно будет однозначно представить набором чисел, являющихся коэффициентами соответствующей линейной комбинации, а всевозможные векторные соотношения превратить в соотношения числовые.

Этот подход уже применялся в аналитической геометрии [5]. В пространстве V_2 любые два неколлинеарных вектора образуют базис, так как через такую пару векторов любой вектор плоскости выражается однозначно в виде линейной комбинации. Аналогично в пространстве V_3 (множество векторов в пространстве) базис образуют любые три некомпланарных вектора. Для матриц использовалось понятие базисных строк и базисных столбцов. По теореме о базисном миноре базисные строки (столбцы) линейно независимы, а любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Базисом линейного пространства V называют упорядоченную конечную систему линейно независимых векторов, через которые линейно выражается любой вектор пространства.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис в пространстве V . Определение базиса говорит о том, что любой вектор $u \in V$ может быть однозначно представлен в виде $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$. Такую запись называют **разложением вектора u по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$** .

Данное определение базиса согласовывается с понятием базиса в пространстве свободных векторов в V_1, V_2, V_3 . Например, в V_3 базисом была названа любая тройка некомпланарных векторов. Такая тройка векторов является линейно независимой, так как представление одного ее вектора в виде линейной комбинации двух других равносильно компланарности трех векторов. Кроме того, известно, что любой вектор в пространстве можно выразить через три произвольных некомпланарных вектора в виде их линейной комбинации. Три компланарных вектора не могут быть базисом в V_3 , так как любая линейная комбинация таких векторов даст вектор, им компланарный.

Теорема о единственности разложения вектора по базису. В линейном пространстве разложение любого вектора по данному базису единственно.

Выберем в линейном пространстве V произвольный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и предположим, что вектор u имеет в этом базисе два разложения $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$ и $u = u'_1 e_1 + u'_2 e_2 + \dots + u'_n e_n$. Применяя аксиомы линейного пространства, после почленного вычитания линейных комбинаций одной из другой получим $(u'_1 - u_1) e_1 + (u'_2 - u_2) e_2 + \dots + (u'_n - u_n) e_n = 0$. Так как базис – это линейно независимая система векторов, линейная комбинация векторов базиса может быть равна нулевому вектору только в случае равенства нулю всех коэффициентов. Значит, все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю: $u'_1 - u_1 = 0, u'_2 - u_2 = 0, \dots, u'_n - u_n = 0$. Таким образом, $u'_1 = u_1, u'_2 = u_2, \dots, u'_n = u_n$ и любые два разложения вектора u по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ совпадают.

Условие линейной независимости векторов базиса означает, что нулевой вектор имеет в этом базисе единственное разложение: со всеми равными нулю коэффициентами.

Согласно определению базиса, он является упорядоченной системой векторов. Это значит, что, изменив порядок векторов в системе, мы получим другой базис. Порядок векторов в базисе фиксируют для того, чтобы задать определенный порядок коэффициентов разложения произвольного вектора. Это позволяет заменить линейную комбинацию, представляющую вектор, упорядоченным набором ее коэффициентов и тем самым упростить запись. Порядок векторов в базисе определяется их нумерацией. Коэффициенты разложения вектора u по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейного пространства, записанные в соответствии с порядком векторов в базисе, называют **координатами вектора u в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$** .

123

Фиксация порядка векторов в базисе преследует еще одну цель – ввести матричные способы записи векторных соотношений. Базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ в данном линейном пространстве V удобно записывать как матрицу-строку $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, элементы которой – векторы, а координаты вектора u в этом базисе – как матрицу-столбец:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Тогда разложение $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$ вектора u по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ можно записать как произведение матрицы-строки на матрицу-столбец: $u = e \cdot u$.

Пример 1.15. Единичные базисные векторы декартовой системы координат в V_3 имеют стандартное обозначение и порядок i, j, k . В матричной записи это будет выглядеть так: $e = (i, j, k)$. Вектор с координатами $-1, 2, 2$ может быть представлен в виде

$$u = \{-1, 2, 2\} = -i + 2j + 2k = (i, j, k) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = eu,$$

где u – столбец координат вектора u .

Запись линейных операций над свободными векторами в координатной форме обобщается на случай произвольного линейного пространства.

Теорема 1.1. При сложении любых двух векторов в линейном пространстве их координаты в одном и том же базисе складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Рассмотрим в линейном пространстве V базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Пусть даны разложения векторов u и v в этом базисе:

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n, \quad v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n) + (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n) = \\ &= (u_1 + v_1) \mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2) \mathbf{e}_2 + \dots + (u_n + v_n) \mathbf{e}_n, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение теоремы. В матричной записи координат этому соответствует матричная сумма столбцов координат.

Аналогично для произвольного действительного числа α

$$\alpha \mathbf{u} = \alpha(u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n) = (\alpha u_1) \mathbf{e}_1 + (\alpha u_2) \mathbf{e}_2 + \dots + (\alpha u_n) \mathbf{e}_n,$$

что и требовалось доказать.

Запись координат векторов в матричной форме позволяет рассматривать операции сложения векторов и умножения вектора на число как соответствующие операции над матрицами-столбцами [3], то есть складывать соответствующие элементы матриц-столбцов и умножать элементы матрицы-столбца на число. Запись утверждения теоремы в матричной форме $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{e}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, $\alpha \mathbf{u} = \mathbf{e}(\alpha \mathbf{u})$ соответствует свойствам операций с матрицами [3].

Следствие. Линейная независимость векторов линейного пространства эквивалентна линейной независимости их столбцов координат в одном и том же базисе этого линейного пространства.

Если вектор $\mathbf{u}$ равен линейной комбинации векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, то есть $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$, то его столбец координат $\mathbf{u}$ в заданном базисе $\mathbf{e}$ равен такой же линейной комбинации столбцов координат $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ в этом же базисе: $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$. Это следует из равенств: $\mathbf{e}\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{e}\mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}\mathbf{u}_n = \alpha_1 (\mathbf{e}\mathbf{u}_1) + \alpha_2 (\mathbf{e}\mathbf{u}_2) + \dots + \alpha_n (\mathbf{e}\mathbf{u}_n) = \mathbf{e}(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n)$.

Пример 1.16. В линейном арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$ векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ образуют базис $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, так как ранее мы показали, что они линейно независимы и любой вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ представим в виде $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$. Базис $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ в пространстве $\mathbf{R}^n$ называют стандартным.

124 Число векторов базиса линейного пространства называют **размерностью пространства V** и обозначают $\dim V$.

Если размерность линейного пространства V равна n , то есть существует линейно независимая система n векторов, являющаяся его базисом, то говорят, что линейное пространство n -мерно или $\dim V = n$. Существуют линейные пространства, в которых можно выбрать линейно независимую систему, содержащую бесконечное множество векторов. Такие линейные пространства называют бесконечномерными.

Пример 1.17. Линейное пространство $C_{[0,1]}$ функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$, является бесконечномерным. Для любого натурального n система многочленов $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$, являющихся элементами этого линейного пространства, линейно независима. В самом деле, линейная комбинация этих многочленов, отвечающая набору коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, есть многочлен $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$, который обращается в нуль тождественно, то есть при всех значениях x из отрезка $[0, 1]$, только в случае равенства нулю всех его коэффициентов.

Поскольку в линейном пространстве размерности n может существовать несколько линейно независимых систем n векторов, любая из них может быть выбрана в качестве базиса. Любые два базиса одного линейного пространства содержат одно и то же количество векторов, равное его размерности. Так, в линейном арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$ стандартный базис $\mathbf{e}$ содержит n векторов, то есть $\dim \mathbf{R}^n = n$, что отражено в его обозначении. Пространство векторов на плоскости V_2 имеет базис из двух векторов, например, $\mathbf{i} = \{1, 0\}$ и $\mathbf{j} = \{0, 1\}$, значит $\dim V_2 = 2$. Любые два других линейно независимых вектора, например, $\mathbf{u} = (-1, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 2)$, также являются базисом этого пространства. Аналогично, пространство векторов V_3 имеет размерность $\dim V_3 = 3$, а в качестве базиса можно взять указанные ранее вектора $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Пространство векторов, параллельных прямой, имеет размерность 1 и любой из этих векторов может быть выбран в качестве базиса данного пространства.

Пусть в линейном пространстве V задана система векторов $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$. Рассмотрим множество S всех векторов в V , которые могут быть представлены линейной комбинацией этих векторов. Это множество является линейным подпространством в V . Действительно, пусть

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_k \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_k \mathbf{e}_k.$$

Тогда

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1) \mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2) \mathbf{e}_2 + \dots + (u_k + v_k) \mathbf{e}_k \in S,$$

$\alpha \mathbf{u} = (\alpha u_1) \mathbf{e}_1 + (\alpha u_2) \mathbf{e}_2 + \dots + (\alpha u_k) \mathbf{e}_k \in S$, где $\alpha \in \mathbf{R}$. Описанное линейное пространство, являющееся совокупностью всевозможных линейных комбинаций векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$, называется **линейной оболочкой $L\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\}$ системы векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$** .

Любое собственное линейное подпространство можно представить как линейную оболочку некоторой системы его векторов. В этом заключается универсальный способ описания линейных подпространств. Само линейное пространство является линейной оболочкой любого из своих базисов. Любое подпространство является линейным пространством относительно операций объемлющего линейного пространства и поэтому имеет размерность и базис. **Размерность $\dim W$ подпространства W** равна числу векторов его базиса.

Теорема 1.2. Если W – линейное подпространство линейного пространства V , то $\dim W \leq \dim V$. Если к тому же W не совпадает с V , то $\dim W < \dim V$.

Любой базис линейного подпространства W , рассматриваемого как линейное пространство, является линейно независимой системой векторов в объемлющем линейном пространстве. Если этот базис из W является базисом и в V , то $\dim W = \dim V$ и подпространство W совпадает с пространством V . Если базис в W не является базисом объемлющего линейного пространства V , то существует такой вектор $\mathbf{u} \in V$, который не является линейной комбинацией векторов этого базиса. В этом случае, конечно, линейное подпространство W не может совпадать с пространством V . Добавив вектор $\mathbf{u}$ к векторам базиса, получим линейно независимую систему векторов. Это значит, что в пространстве V найдено больше линейно независимых векторов, чем $\dim W$. Следовательно, согласно определению размерности линейного пространства $\dim W < \dim V$.

В линейном пространстве все базисы равноправны. Тот или иной базис выбирают исходя из конкретных обстоятельств, а может быть, и вообще произвольно. Иногда удобно использовать для представления элементов линейного пространства несколько базисов, но тогда возникает задача о преобразовании координат векторов, которое связано с изменением базиса.

Пусть в n -мерном линейном пространстве V заданы два базиса: старый $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ и новый $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$. Любой вектор можно разложить по базису $\mathbf{e}$. В частности, каждый вектор из базиса $\mathbf{f}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса $\mathbf{e}$: $\mathbf{f}_j = c_{1j}\mathbf{e}_1 + c_{2j}\mathbf{e}_2 + \dots + c_{nj}\mathbf{e}_n$, $j = 1, \dots, n$. Запишем эти представления в матричной форме:

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{e} \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{или} \quad \mathbf{f} = \mathbf{e} C, \quad \text{где} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $C = (c_{ij})_n$, элементами которой c_{ij} являются координаты векторов $\mathbf{f}_j$ по базису $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$: $\mathbf{f}_j = c_{1j}\mathbf{e}_1 + c_{2j}\mathbf{e}_2 + \dots + c_{nj}\mathbf{e}_n$ ($j = 1, \dots, n$), называется **матрицей перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$** . Матрица перехода обладает следующими свойствами.

Свойство 1. Матрица перехода невырождена и всегда имеет обратную.

Действительно, столбцы матрицы перехода – это столбцы координат векторов нового базиса в старом. Следовательно, они, как и векторы базиса, линейно независимы. Значит, матрица C невырожденная и имеет обратную матрицу C^{-1} .

Свойство 2. Если в n -мерном линейном пространстве задан базис $\mathbf{e}$, то для любой невырожденной квадратной матрицы C порядка n существует такой базис $\mathbf{f}$ в этом линейном пространстве, что C будет матрицей перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$.

Из невырожденности матрицы C следует, что ее ранг равен n , а поэтому ее столбцы будут линейно независимы. Эти столбцы являются столбцами координат векторов системы $\mathbf{f} = \mathbf{e} C$. Линейная независимость столбцов матрицы C равносильна линейной независимости системы векторов $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$. Так как система $\mathbf{f}$ содержит n векторов, причем линейное пространство n -мерно, то эта система векторов является базисом.

Пример 1.18. Пусть $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ – базис линейного пространства L_3 . Тогда система векторов $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3$ тоже является базисом в этом линейном пространстве. Это следует из того, что $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) C$ или

$$\mathbf{f} = \mathbf{e} C, \quad \text{где диагональная матрица} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{невырождена.}$$

Свойство 3. Если C – матрица перехода от старого базиса $\mathbf{e}$ к новому базису $\mathbf{f}$ линейного пространства, то C^{-1} – матрица перехода от базиса $\mathbf{f}$ к

базису **e**. Матрица **C** невырождена, и поэтому из равенства $\mathbf{f} = \mathbf{e} \mathbf{C}$ следует, что $\mathbf{f} \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{e}$, т.е. столбцы матрицы $\mathbf{C}^{-1}$ являются столбцами координат векторов базиса **e** относительно базиса **f**. Это означает, что матрица $\mathbf{C}^{-1}$ – матрица перехода от базиса **f** к базису **e**.

Свойство 4. Если в линейном пространстве заданы базисы **e**, **f**, **b**, причем **C** – матрица перехода от базиса **e** к базису **f**, а **B** – матрица перехода от базиса **f** к базису **b**, то произведение этих матриц **CB** – матрица перехода от базиса **e** к базису **b**.

Согласно определению матрицы перехода, имеем равенства $\mathbf{f} = \mathbf{e} \mathbf{C}$, $\mathbf{b} = \mathbf{f} \mathbf{B}$, откуда $\mathbf{b} = \mathbf{f} \mathbf{B} = (\mathbf{e} \mathbf{C}) \mathbf{B} = \mathbf{e} (\mathbf{CB})$, то есть **CB** – матрица перехода от базиса **e** к базису **b**.

Пример 1.19. Пусть векторы нового базиса **e** выражаются через векторы

старого базиса соотношениями
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \end{cases}$$
 тогда матрица перехода от старого

базиса **b** к новому **e**

$$\mathbf{U}_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и определитель ее равен -2 , т.е. обратная матрица существует и она равна

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,
$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = 0,5\mathbf{e}_1 + 0,5\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b}_2 = 0,5\mathbf{e}_1 - 0,5\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b}_3 = 0,5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 0,5\mathbf{e}_3 \end{cases}$$
 – соотношения, связывающие

векторы нового базиса с векторами старого базиса.

Пусть $\mathbf{U}_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса **e** к базису **f**, тогда

$$\mathbf{U}_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{f}} = \mathbf{U}_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{e}} \mathbf{U}_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ – матрица}$$

перехода от базиса **b** к базису **f**.

Рассмотрим теперь, как преобразуются координаты произвольного вектора в линейном пространстве при переходе от старого базиса к новому. Выберем произвольный вектор $\mathbf{u} \in V$ и разложим его по старому базису $\mathbf{e}$: $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \dots + u_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{u} = \mathbf{e} \mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ – вектор-столбец координат $\mathbf{u}$. Аналогично разложение этого вектора по новому базису $\mathbf{f}$: $\mathbf{u} = u'_1\mathbf{f}_1 + u'_2\mathbf{f}_2 + \dots + u'_n\mathbf{f}_n$, $\mathbf{u} = \mathbf{f} \mathbf{u}'$, $\mathbf{u}'$ – вектор-столбец координат вектора $\mathbf{u}$ в базисе $\mathbf{f}$. Найдем связь между старыми координатами $\mathbf{u}$ вектора $\mathbf{u}$ и новыми его координатами $\mathbf{u}'$. Из предыдущих соотношений следует, что $\mathbf{e} \mathbf{u} = \mathbf{f} \mathbf{u}'$. Учитывая, что $\mathbf{f} = \mathbf{e} \mathbf{C}$, получаем $\mathbf{e} \mathbf{u} = (\mathbf{e} \mathbf{C}) \mathbf{u}'$ или $\mathbf{e} \mathbf{u} = \mathbf{e} (\mathbf{C} \mathbf{u}')$. Последнее равенство можно рассматривать как запись двух разложений одного и того же вектора $\mathbf{u}$ в данном базисе $\mathbf{e}$. Разложениям соответствуют столбцы координат $\mathbf{u}$ и $\mathbf{C} \mathbf{u}'$, которые в силу единственности разложения вектора по базису должны быть равны: $\mathbf{u} = \mathbf{C} \mathbf{u}'$ или $\mathbf{u}' = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}$. Итак, чтобы получить координаты вектора в старом базисе, необходимо столбец координат этого вектора в новом базисе умножить слева на матрицу перехода из старого базиса в новый.

Пример 1.20. Рассмотрим в V_2 базис $\mathbf{e} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ из ортогональных векторов единичной длины. Обозначим через $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ новый базис, который получается поворотом старого базиса на заданный угол φ . Исходя из заданного угла поворота мы можем найти координаты векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ нового базиса относительно

старого $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$. Эти разложения позволяют составить матри-

цу перехода $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ из старого базиса $\mathbf{e}$ в новый $\mathbf{f}$, а также обратную

с матрицу $\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Найденные матрицы перехода $\mathbf{C}$ (из старого

базиса в новый) и $\mathbf{C}^{-1}$ (из нового базиса в старый) позволяют записать соотношения между старыми u_1, u_2 и новыми u'_1, u'_2 координатами произвольного вектора $\mathbf{u}$ из V :

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi, & u_1 &= u'_1 \cos \varphi - u'_2 \sin \varphi, \\ u'_2 &= -u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi, & u_2 &= u'_1 \sin \varphi + u'_2 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Например, вектор $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ в старом базисе имеет координаты $u_1 = 1, u_2 = 1$, а в новом базисе – $u'_1 = \cos \varphi + \sin \varphi, u'_2 = -\sin \varphi + \cos \varphi$.

§5. Евклидово пространство

В пространствах векторов V_2 и V_3 известна операция скалярного умножения векторов, пользуясь которой можно было определять их длину и угол между векторами, то есть наглядно представить их размеры и взаимное расположение на плоскости или в пространстве. В произвольном линейном пространстве также можно определить аналогичное произведение векторов исходя из его свойств, установленных в геометрии. **Скалярное произведение двух векторов $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$** – скалярная функция двух векторных аргументов, подчиняющаяся определенным законам:

- 1) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$;
- 2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$;
- 3) $(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u}, \mathbf{v})$;
- 4) $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ для всякого $\mathbf{v}$;
 $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Л25
 Линейное пространство, в котором введено скалярное произведение, называют **евклидовым пространством** E . Скалярное произведение вектора на себя – скалярный квадрат.

Пример 1.21. В линейном пространстве V_3 было введено скалярное умножение согласно правилу $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cos \varphi$, где φ – угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, а $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|$ – их длины. Это умножение удовлетворяет приведенным аксиомам скалярного умножения [4]. Действительно, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cos \varphi = |\mathbf{y}| \cdot |\mathbf{x}| \cos \varphi = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$; $(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\alpha \mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cos \varphi = \alpha |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cos \varphi = \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y})$; или $\alpha |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cos \varphi = |\mathbf{x}| \cdot |\alpha \mathbf{y}| \cos \varphi = (\mathbf{x}, \alpha \mathbf{y})$; так как $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{x}| \geq 0$ и может быть равным 0 только для нулевого вектора, законы 1), 3), 4) для скалярного произведения выполнены. Для проверки закона 2) воспользуемся координатной формой записи скалярного произведения. Поскольку известно, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$, закон 2) запишется:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= ((x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + (x_3 + y_3)z_3) = \\ &= (x_1 z_1 + y_1 z_1) + (x_2 z_2 + y_2 z_2) + (x_3 z_3 + y_3 z_3) = \\ &= (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) + (y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Следовательно, линейное пространство V_3 является евклидовым пространством.

Пример 1.22. В линейном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ формула $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ вводит скалярное умножение, поскольку выполняются аксиомы скалярного умножения. В этом можно убедиться аналогично предыдущему примеру, значит $\mathbb{R}^n$ становится евклидовым арифметическим пространством.

Пример 1.23. В произвольном n -мерном линейном пространстве V всегда можно ввести скалярное произведение, причем различными способами. Выберем в этом пространстве некоторый базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Для произвольных векторов $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$ введем скалярное произведение по формуле $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$. Нетрудно убедиться, что законы скалярного умножения выполняются, то есть n -мерное линейное пространство становится евклидовым. Отметим, что разным базисам будут соответствовать, вообще говоря, разные операции скалярного умножения.

Пример 1.24. Линейное пространство $C_{[0,1]}$ всех функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$, тоже становится евклидовым, если в нем ввести скалярное

$$\text{умножение } (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx. \text{ Убедимся, используя свойства определенного}$$

интеграла, что эта операция – действительно скалярное умножение.

$$\text{Закон 1): } (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx = (g, f).$$

$$\text{Закон 2): } (f+f_2, g) = \int_0^1 (f_1(x) + f_2(x))g(x)dx = \int_0^1 f_1(x)g(x)dx + \int_0^1 f_2(x)g(x)dx = (f_1, g) + (f_2, g).$$

$$\text{Закон 3): } (af, g) = \int_0^1 \alpha f(x)g(x)dx = \alpha \int_0^1 f(x)g(x)dx = \alpha(f, g).$$

$$\text{Закон 4): } (f, f) = \int_0^1 f(x)f(x)dx = \int_0^1 f^2(x)dx \geq 0.$$

Из свойств непрерывных функций следует, что последнее неравенство превращается в равенство только в случае, когда $f(x) \equiv 0$.

Теорема 1.3. Для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ евклидова пространства E справедливо неравенство Коши-Буняковского $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \leq (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b})$.

При $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ обе части неравенства равны нулю и неравенство выполняется. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Для любого действительного числа α в силу закона 4) выполняется неравенство $(\alpha\mathbf{a} - \mathbf{b}, \alpha\mathbf{a} - \mathbf{b}) \geq 0$. Преобразуем левую часть неравенства, используя законы скалярного умножения:

$$(\alpha\mathbf{a} - \mathbf{b}, \alpha\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{a} - \mathbf{b}) - (\mathbf{b}, \alpha\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \alpha^2(\mathbf{a}, \mathbf{a}) - 2\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}).$$

Полученный квадратный трехчлен относительно параметра α неотрицателен при всех действительных значениях параметра.

Следовательно, его дискриминант равен нулю или отрицательный, т.е. выражение $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \leq 0$, что и требовалось доказать.

В евклидовом пространстве $C_{[0,1]}$ неравенство Коши-Буняковского превращается в неравенство Буняковского:

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 g^2(x)dx.$$

Евклидово пространство – это частный случай линейного пространства и поэтому можно говорить о его подпространствах в смысле данного ранее определения. Каждое из таких линейных подпространств является евклидовым пространством относительно скалярного произведения, заданного в объемлющем евклидовом пространстве.

§6. Ортонормированный базис

Два вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ в евклидовом пространстве называют **ортгоналными**, если их скалярное произведение равно нулю: $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Ортгональность векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ будем обозначать $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Отметим, что нулевой вектор ортгонален любому другому, так как для любого вектора $\mathbf{u}$ скалярное произведение $(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = 0$.

Говорят, что вектор u в евклидовом пространстве E ортогонален подпространству H , если он ортогонален каждому вектору этого подпространства, обозначают $u \perp H$. Если $H = L\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, то условие $u \perp H$ равносильно тому, что он ортогонален и каждому вектору $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Действительно, если u ортогонален H , то, согласно определению, он ортогонален и каждому вектору $a_1, a_2, \dots, a_k$. Докажем обратное утверждение. Пусть $u \perp a_i$, $i = 1, \dots, k$, и $v \in H$. Тогда вектор v является линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$, т.е. $v = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$. Согласно закону 2) для скалярного произведения

$$(u, v) = (u, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k) = \alpha_1 (u, a_1) + \alpha_2 (u, a_2) + \dots + \alpha_k (u, a_k) = 0.$$

В частности, если векторы u и a ортогональны, то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ векторы u и αa также ортогональны: $(u, \alpha a) = \alpha (u, a) = 0$.

В линейном пространстве обобщением понятия длины свободного вектора является норма. Длину вектора в линейном пространстве V_2 или V_3 можно рассматривать как функцию, которая каждому вектору ставит в соответствие число – его длину. Эта функция обладает некоторыми характерными свойствами, которые и служат основой для определения нормы в линейном пространстве. Норму вектора в линейном пространстве иногда называют длиной, имея в виду связь с аналогичным термином векторной алгебры.

Функцию, заданную на линейном пространстве V , которая каждому вектору $v \in V$ ставит в соответствие действительное число, равное квадратному корню из его скалярного произведения, называют нормой или длиной вектора v и обозначают $|v|$. Согласно определению, $|v| = \sqrt{(v, v)}$. Пользуясь понятием нормы, запишем доказанное в предыдущем параграфе **неравенство Коши-Буняковского** для абсолютной величины скалярного произведения в следующем виде:

$$|(a, b)| \leq |a| \cdot |b| \text{ для любых } a, b \in V.$$

Систему векторов евклидова пространства, любые два вектора которой ортогональны, называют ортогональной.

Теорема 1.4. Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Рассмотрим произвольную ортогональную систему ненулевых векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$. Предположим, что для некоторых действительных коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ выполняется равенство $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$. Умножим это равенство скалярно на какой-нибудь вектор e_i : $(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, e_i) = (0, e_i)$.

В силу законов скалярного произведения правая часть полученного равенства равна нулю, и, преобразуя левую часть, получаем:

$$\alpha_1 (e_1, e_i) + \alpha_2 (e_2, e_i) + \dots + \alpha_n (e_n, e_i) = 0.$$

Так как система векторов ортогональна, то все слагаемые слева, кроме одного, равны нулю, то есть $\alpha_i (e_i, e_i) = 0$. Так как вектор e_i ненулевой, то есть его скалярный квадрат $(e_i, e_i) \neq 0$, то $\alpha_i = 0$. Поскольку индекс i можно выбирать произвольно, то все коэффициенты α_i являются нулевыми, а следовательно, система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ является линейно независимой.

Пример 1.25. В евклидовом пространстве $C_{[0, \pi]}$ система функций $\cos kx$, $k = 1, \dots, n$, является ортогональной, поскольку

$$\begin{aligned} (\cos kx, \cos lx) &= \int_0^{\pi} \cos kx \cos lx dx = 0,5 \int_0^{\pi} (\cos(k+l)x + \cos(k-l)x) dx = \\ &= 0,5 \int_0^{\pi} \cos(k+l)x dx + 0,5 \int_0^{\pi} \cos(k-l)x dx = \left(0,5 \frac{\sin(k+l)x}{k+l} + 0,5 \frac{\sin(k-l)x}{k-l} \right) \Big|_0^{\pi} = 0 \\ &\text{при } k, l = 1, \dots, n, k \neq l. \end{aligned}$$

Евклидово пространство является линейным пространством и его размерность также определяется числом векторов базиса. Если базис евклидова пространства представляет собой ортогональную систему векторов, то этот базис называют ортогональным. Среди ортогональных базисов в евклидовом пространстве можно выделить базисы с единичной нормой (длиной) базисных векторов.

126 Базис пространства E , для которого выполнено свойство $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases}$, называется **ортонормированным базисом** $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Дополнительное требование к нормам векторов в ортонормированном базисе не является существенным, так как любой ортогональный базис можно преобразовать в ортонормированный, умножая векторы на соответствующие нормирующие коэффициенты, а именно, разделив каждый вектор на его длину.

Пример 1.26. Система из трех векторов $a = (1, 0, -1)$, $b = (1, 0, 1)$, $c = (0, 1, 0)$ в евклидовом арифметическом пространстве R^3 образует ортогональный базис, потому что $(a, b) = 1 + 0 - 1 = 0$; $(a, c) = 0 + 0 + 0 = 0$; $(b, c) = 0 + 0 + 0 = 0$. Этот базис не является нормированным, так как

$|a| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \neq 1$. Разделив векторы a и b на их нормы, то есть на число $\sqrt{2}$, этот базис можно сделать ортонормированным:

$$a_1 = (1, 0, -1)/\sqrt{2}, \quad b_1 = (1, 0, 1)/\sqrt{2}, \quad c_1 = (0, 1, 0).$$

Пример 1.27. Векторы i, j образуют ортонормированный базис в пространстве V_2 свободных векторов на плоскости. Векторы i, j, k образуют ортонормированный базис в пространстве V_3 .

Использование ортонормированного базиса облегчает вычисление скалярного произведения по координатам векторов. Пусть в евклидовом пространстве задан некоторый базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Рассмотрим два произвольных вектора u и v в этом пространстве, представленных в базисе своими координатами: $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$, $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$. Скалярное произведение векторов u и v может быть выражено через скалярные произведения векторов базиса:

$$\left(\sum_i^n u_i \mathbf{e}_i, \sum_j^n v_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Запишем разложения векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ по базису в матричной форме: $\mathbf{u} = \mathbf{e}\mathbf{u}$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}\mathbf{v}, \text{ где } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \text{ а из скалярных произведений базисных}$$

векторов составим квадратную матрицу $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \dots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \dots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$ порядка n .

Тогда скалярное произведение заданных векторов можно записать в матричной форме: $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{v}$. В силу коммутативности операции скалярного умножения матрица $\mathbf{G}$ является симметрической. Матрицу $\mathbf{G} = (g_{ij})_{n,n}$, элементы которой $g_{ij} = (\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j)$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$), где $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ – любые векторы пространства E , называют **матрицей Грама** $\mathbf{G} = (g_{ij})_{n,n}$.

Пример 1.28. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задан базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, где $\mathbf{e}_1 = (1, 3, 6)$, $\mathbf{e}_2 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{e}_3 = (4, 1, 3)$, тогда матрица Грама для этого базиса имеет вид

$$\mathbf{G} = (g_{ij})_{3,3} = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 11 & 25 \\ 11 & 6 & 12 \\ 25 & 12 & 26 \end{pmatrix}$$

Пусть $\mathbf{e}$ – ортонормированный базис, тогда скалярные произведения базисных векторов при несовпадающих i и j равны нулю, а скалярные квадраты базисных векторов равны $\mathbf{e}_i^2 = |\mathbf{e}_i|^2 = 1$. Поэтому для ортонормированного базиса в матрице Грама $\mathbf{G}$ все элементы главной диагонали равны 1, а элементы, не лежащие на главной диагонали, равны 0, т.е. матрица Грама является единичной. Значит,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{E} \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

В частности, в ортонормированном базисе норма вектора $\mathbf{u}$ может быть вычислена по формуле $|\mathbf{u}| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$, а для косинуса угла φ между ненулевыми векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ получаем выражение

$$\cos \varphi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}}.$$

В ортонормированном базисе также упрощается вычисление координат вектора: они выражаются через скалярные произведения вектора $\mathbf{u}$ на соответствующие базисные вектора: если $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n$, то, умножив скалярно на вектор $\mathbf{e}_i$, находим координату $u_i = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Пример 1.29. В евклидовом арифметическом пространстве R^5 найдем угол между векторами $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 0, 2, 0)$ и $\mathbf{a}_2 = (3, 1, 2, 1, 1)$. Согласно найденной формуле

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1+4+0+4+0} \sqrt{9+1+4+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{9} \sqrt{16}} = \frac{1}{4}.$$

По произвольному базису в евклидовом пространстве всегда можно построить ортонормированный. Способ построения ортонормированного базиса по произвольному называется **процессом ортогонализации**.

Пусть $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ – некоторый базис в n -мерном евклидовом пространстве E . Построим ортонормированный базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. Для этого последовательно вычисляем векторы $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{g}_2$ и $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{g}_n$ и $\mathbf{e}_n$ по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{f}_1, & \mathbf{e}_1 &= \mathbf{g}_1 / |\mathbf{g}_1|, \\ \mathbf{g}_2 &= \mathbf{f}_2 - (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_2 &= \mathbf{g}_2 / |\mathbf{g}_2|, \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{f}_3 - (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 - (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_3 &= \mathbf{g}_3 / |\mathbf{g}_3|, \\ &\dots & \dots & \\ \mathbf{g}_n &= \mathbf{f}_n - (\mathbf{f}_n, \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 - \dots - (\mathbf{f}_n, \mathbf{e}_{n-1}) \mathbf{e}_{n-1}, & \mathbf{e}_n &= \mathbf{g}_n / |\mathbf{g}_n|. \end{aligned}$$

Покажем, что базис $\mathbf{e}$ – ортонормированный. Применим метод математической индукции, то есть будем доказывать, что для любого i , $i = 1, \dots, n$ векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ образуют ортогональную систему и их длины равны единице. Очевидно, что при $i = 1$ вектор $\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_1 / |\mathbf{g}_1| = \mathbf{f}_1 / |\mathbf{f}_1|$ – вектор единичной длины, а систему векторов, состоящую из одного вектора, считают ортогональной по определению. Пусть векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ образуют ортонормированную систему. Вычислим новый вектор $\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{f}_{k+1} - (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 - \dots - (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k$. Предположим, что $\mathbf{g}_{k+1} = 0$, тогда $\mathbf{f}_{k+1} = (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 - \dots - (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k$, то есть вектор $\mathbf{f}_{k+1}$ является линейной комбинацией системы векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$, которые выражаются через векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$. Значит, этот вектор является линейной комбинацией системы векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ и система векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_{k+1}$ – линейно зависима, что противоречит условию линейной независимости системы векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$, являющейся базисом евклидова пространства E . Итак, наше предположение привело к противоречию и потому неверно, то есть $\mathbf{g}_{k+1} \neq 0$. Убедимся, что вектор $\mathbf{g}_{k+1}$ ортогонален каждому из векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$. Действительно,

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_{k+1}, \mathbf{e}_i) &= (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_i) - (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) - \dots - (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) = \\ &= (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_i) - (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_i) - (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_i) = 0, \end{aligned}$$

так как векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ попарно ортогональны, а $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$.

Следовательно, векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}$, где $\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{g}_{k+1} / |\mathbf{g}_{k+1}|$, образуют ортонормированную систему.

Пример 1.30. В линейном пространстве V_2 рассмотрим векторы $\mathbf{u} = (1, 1)$ и $\mathbf{v} = (3, 4)$. Так как векторы ненулевые и неколлинеарные, то они образуют базис в пространстве V_2 . Построим при помощи процесса ортогонализации ортонормированный базис. Находим:

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{u},$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_1 / |\mathbf{g}_1| = (1, 1) / |(1, 1)| = (1, 1) / \sqrt{1+1} = (1, 1) / \sqrt{2} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2 &= \mathbf{f}_2 - (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \mathbf{v} - (\mathbf{v}, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = (3, 4) - (3/\sqrt{2} + 4/\sqrt{2})(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \\ &= (3, 4) - (7/2, 7/2) = (3, 4) - (3, 5) = (-0, 5; 0, 5), |\mathbf{g}_2| = 0,5\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{g}_2 / |\mathbf{g}_2| = (-0, 5; 0, 5) / (0,5\sqrt{2}) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}).$$

Векторы $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ и $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ образуют ортонормированный базис в V_2 .

§7. Проекция вектора на подпространство

Выберем некоторый ортонормированный базис $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ в некотором линейном подпространстве H и дополним его до базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_{k+1}, \dots, \mathbf{f}_n$ во всем евклидовом пространстве E , $\dim E = n$. Исходя из этого базиса построим при помощи процесса ортогонализации ортонормированный базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ в E . Так как первые k векторов исходного базиса попарно ортогональны и имеют единичную длину, процесс ортогонализации оставит их без изменения. Векторы $\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ ортогональны каждому из векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ базиса линейного подпространства H . Подпространство $H = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$, поэтому векторы $\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ ортогональны подпространству H .

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{u} \in E$ и запишем его разложение по базису $\mathbf{e}$: $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \dots + u_n\mathbf{e}_n$. В этом разложении выделим два вектора $\mathbf{u}_1 = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \dots + u_k\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{u}_2 = u_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \dots + u_n\mathbf{e}_n$, тогда вектор $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, где вектор $\mathbf{u}_1 \in H$, а вектор $\mathbf{u}_2$ ортогонален подпространству H . Вектор $\mathbf{u}_1$ называют ортогональной проекцией вектора $\mathbf{u}$ на линейное подпространство H , вектор $\mathbf{u}_2$ – ортогональной составляющей вектора $\mathbf{u}$ относительно линейного подпространства H . Каково бы ни было линейное подпространство H в евклидовом пространстве E , любой вектор $\mathbf{x}$ из него можно представить в виде суммы его ортогональной проекции на линейное подпространство H и ортогональной составляющей этого вектора относительно линейного подпространства H .

Пример 1.31. Рассмотрим в пространстве векторов V_3 подпространство векторов V_2 . В качестве базиса в V_3 возьмем стандартный базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, причем вектора $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ образуют базис V_2 . Пусть задан вектор $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \in V_3$, тогда вектор $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \in V_2$, то есть является ортогональной проекцией вектора $\mathbf{a}$ на подпространство V_2 , а вектор $\mathbf{a}_2 = 6\mathbf{k} \perp V_2$, то есть $\mathbf{a}_2$ – ортогональная составляющая вектора $\mathbf{a}$ относительно линейного подпространства V_2 .

F

(1.1)

7

3

1

or

А это равносильно тому, что $\mathbf{c} = \mathbf{b}_2$, т.е. вектор $\mathbf{c}$ совпадает с ортогональной составляющей относительно подпространства H , а следовательно, ортогонален подпространству H и всем его векторам, в том числе и векторам $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$. Поэтому вектор $\mathbf{c}$ является решением системы $(\mathbf{a}_j, \mathbf{c}) = 0$, $j = 1, \dots, k$, или $(\mathbf{a}_j, \mathbf{b} - x_1 \mathbf{a}_1 - \dots - x_k \mathbf{a}_k) = 0$, $j = 1, \dots, k$. После скалярного умножения и переноса скалярных произведений, содержащих вектор $\mathbf{b}$, в правую часть получаем систему линейных алгебраических уравнений

[illegible]

относительно неизвестных $x_1, \dots, x_k$. Матрица этой системы $G = ((a_i, a_j))$ – это матрица Грама для системы векторов $a_1, \dots, a_k$. Эта система всегда совместна: ее решениями являются коэффициенты разложения вектора b_i (ортогональной проекции вектора b на H) по системе векторов $a_1, \dots, a_k$, так как в этом случае $c = b_n = b - b_i$.

Теорема 1.5. Если система векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно независима, то ее матрица Грама является невырожденной.

Так как система векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно независима, то равенство $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ выполняется при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Умножив нулевую линейную комбинацию на любой из векторов $\mathbf{a}_i$, $i = 1, \dots, k$, получим, что $(\mathbf{a}_i, \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k) = (\mathbf{a}_i, \mathbf{0}) = 0$. Учитывая свойства скалярного произведения векторов линейного пространства, получаем $(\mathbf{a}_i, \alpha_1 \mathbf{a}_1) + (\mathbf{a}_i, \alpha_2 \mathbf{a}_2) + \dots + (\mathbf{a}_i, \alpha_k \mathbf{a}_k) = \alpha_1 (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_1) + \alpha_2 (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_2) + \dots + \alpha_k (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k) = 0$, $i = 1, \dots, k$, причем $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Следовательно, столбцы матрицы Грама линейно независимы и ее определитель не равен нулю. Итак, матрица Грама – невырожденная.

Наоборот, если система векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима, то ее матрица Грама является вырожденной. Так как система векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима, то равенство $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ выполняется при некотором $\alpha_s \neq 0$, тогда можно представить вектор $\mathbf{a}_s$ в виде линейной комбинации остальных векторов: $\mathbf{a}_s = -\alpha_1/\alpha_s \mathbf{a}_1 - \alpha_2/\alpha_s \mathbf{a}_2 - \dots - \alpha_k/\alpha_s \mathbf{a}_k$. После умножения последнего равенства на любой вектор $\mathbf{a}_i$, $i = 1, \dots, k$, получим

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_s) = -\alpha_1/\alpha_s(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_1) - \alpha_2/\alpha_s(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_2) - \dots - \alpha_k/\alpha_s(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k),$$

следовательно, s -й столбец матрицы Грама является линейной комбинацией остальных ее столбцов, т.е. определитель матрицы Грама равен нулю и матрица Грама – вырожденная.

Итак, если система векторов $a_1, \dots, a_k$ линейно независима, то матрица Грама невырождена и система (1.2) имеет единственное решение. Если же система векторов линейно зависима, то система (1.2), будучи совместной, имеет бесконечно много решений и каждое из них даст решение исходной задачи. Среди этих решений можно выбирать те, которые удовлетворяют каким-то дополнительным условиям.

ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§1. Определение и примеры

Линейная алгебра большое внимание уделяет отображениям, которые векторам одного линейного пространства ставят в соответствие векторы другого или того же самого пространства. Среди таких отображений выделяются те, которые сохраняют алгебраические соотношения, эти отображения естественным образом связаны со структурой линейного пространства. **Линейный оператор A в линейном пространстве V** – правило, по которому каждому вектору $v \in V$ ставится в соответствие некоторый вектор $A(v)$, причем $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v)$ для всех $v, u \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Говорят, что линейный оператор A действует в линейном пространстве V и обозначают $A: V \rightarrow V$. Непосредственно из определения вытекает, что для любого линейного оператора A $A(0) = 0$, так как

$$A(0) = A(0 \cdot 0) = 0 \cdot A(0) = 0.$$

Пример 2.1. Пусть $K_n[x]$ – линейное пространство многочленов одного переменного x степени, не превышающей натуральное число n . Для каждого многочлена $P(x)$ определена его производная $P'(x)$, являющаяся многочленом степени не выше $n - 1$. Таким образом, на линейном пространстве $K_n[x]$ определено правило d/dx , которое каждому многочлену ставит в соответствие его производную. В качестве пространства значений при этом можно выбрать как исходное пространство $K_n[x]$, так и пространство $K_{n-1}[x]$. Оба отображения

$\frac{d}{dx}: K_n[x] \rightarrow K_n[x]; \frac{d}{dx}: K_n[x] \rightarrow K_{n-1}[x]$ удовлетворяют условию линейности в силу свойств линейности производной (производная суммы функций равна сумме производных, при умножении функции на число производная полученной функции равна производной исходной функции, умноженной на это число). Следовательно, рассмотренные правила, по которым преобразуются элементы пространства $K_n[x]$, являются линейными операторами в пространстве $K_n[x]$.

Пример 2.2. В пространстве V_2 свободных векторов на плоскости с обычными операциями сложения и умножения на число векторов поворот вектора на заданный угол φ против часовой стрелки представляет собой правило A , по которому V_2 преобразуется в V_2 . Линейность этого преобразования вытекает из того, что сумма двух свободных векторов может вычисляться по правилу параллелограмма, а диагональ параллелограмма при повороте векторов на угол φ повернется на тот же угол. Умножение вектора на число означает изменение его длины и, возможно, его направления на противоположное. Ясно, что можно сначала умножить вектор на число, а потом повернуть на угол φ , а можно выполнить эти две операции в обратном порядке, т.е. повернуть вектор, а затем умножить его на число. Результат будет один и тот же. Для введенного правила A справедливо равенство $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v)$ для всех $v, u \in V_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и правило A – линейный оператор в линейном пространстве V_2 .

Пример 2.3. Рассмотрим n -мерное линейное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, элементы которого будем представлять как матрицы-столбцы высоты n , и квадратную матрицу A порядка n . Правило $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое

каждому столбцу u ставит в соответствие столбец Au , является линейным оператором в силу свойств умножения матриц:

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av \text{ для всех } v, u \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Пример 2.4. В n -мерном линейном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ для любого действительного числа λ правило $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое формулой $Au = \lambda u$ (растяжение в $|\lambda|$ раз с дополнительным отражением при $\lambda < 0$), является линейным оператором. Этот линейный оператор – частный случай предыдущего, он может быть определен при помощи матрицы λE , где E – единичная матрица.

Пример 2.5. Правило преобразования n -мерного линейного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, которое задается формулой $Au = u + a$, где $a \neq 0$ – некоторый фиксированный вектор, не является линейным, так как, например, для нулевого вектора $A0 = a$, что невозможно для линейного оператора.

§2. Матрица линейного оператора

Пусть задан линейный оператор $A: V \rightarrow V$ и некоторый базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ линейного пространства V . Действие линейного оператора полностью определено, если известны образы векторов базиса. Действительно, если вектор $u \in V$ имеет координаты $u = (u_1, \dots, u_n)^T$, то $A(u) = A(u_1 e_1 + \dots + u_n e_n) = u_1(A(e_1)) + \dots + u_n(A(e_n))$, т.е., зная векторы $A(e_j)$, $j = 1, \dots, n$, можно найти образ любого вектора линейного пространства V .

Рассмотрим действие линейного оператора A на векторы базиса e . Обозначим столбцы координат векторов $A e_j$ в базисе e через a_j , $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^T$, $j=1, \dots, n$. Тогда $A(e_j) = e a_j$, $j=1, \dots, n$. Таким образом, линейному оператору соответствует квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n,n}$, элементы которой определяются из соотношений $A(e_j) = a_{1j} e_1 + \dots + a_{nj} e_n$, ($j = 1, \dots, n$). Эта матрица называется **матрицей A линейного оператора A в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$** .

Порядок матрицы A совпадает с размерностью линейного пространства.

Пример 2.6. Матрицей нулевого оператора $\Theta: V \rightarrow V$, который каждый вектор отображает в нулевой ($\Theta(x) = 0$), независимо от выбора базиса является нулевая матрица соответствующего типа, так как образом любого вектора в случае нулевого оператора является нулевой вектор. Поэтому матрица нулевого оператора в любом базисе должна состоять из нулевых столбцов.

Пример 2.7. Матрица тождественного оператора I , который каждый вектор переводит в себя ($I(x) = x$), также не зависит от выбора базиса и в любом базисе является единичной. Действительно, взяв произвольный базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, получаем, что при $j = 1, \dots, n$

$$I e_j = e_j = 0 \cdot e_1 + \dots + 1 \cdot e_j + \dots + 0 \cdot e_n,$$

где 1 стоит на j -м месте.

§3. Общий вид линейного оператора в линейном пространстве

Матрица линейного оператора полностью характеризует линейный оператор.

Теорема 2.1. Пусть $A: V \rightarrow V$ – линейный оператор. Тогда столбец v координат вектора $v = A(u)$ в данном базисе e линейного пространства V

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Действие линейного оператора **A** на вектор **u** можно теперь записать как умножение столбца координат $(u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ вектора **u** на матрицу оператора

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) \mathbf{A} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) \begin{pmatrix} 0 \\ u_3 \\ -u_2 \end{pmatrix} = u_3 \mathbf{j} - u_2 \mathbf{k}.$$

Итак, имея линейный оператор **A**, можно построить соответствующую ему матрицу. В то же время, какую бы квадратную матрицу порядка *n* мы ни взяли, она будет матрицей некоторого линейного оператора в заданном базисе *n*-мерного линейного пространства. Таким образом, между линейными операторами, действующими в данном *n*-мерном линейном пространстве *V*, и квадратными матрицами порядка *n* существует соответствие, которое является взаимно однозначным, что и утверждает следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть **e** – произвольный базис в *n*-мерном линейном пространстве *V*. Различным линейным операторам **A** и **B**, действующим в пространстве *V*, соответствуют и различные матрицы в базисе **e**. Любая квадратная матрица *A* порядка *n* является матрицей некоторого линейного оператора, действующего в линейном пространстве *V*.

Если матрицы **A** и **B** операторов **A** и **B** в базисе **e** совпадают, то, согласно теореме 2.1, для любого вектора **u** со столбцом координат $\mathbf{u}$ $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{e}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{e}\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{u}$, т.е. образы произвольного вектора при двух отображениях совпадают. Следовательно, совпадают и сами отображения. Пусть $A = (a_{ij})$ – произвольная квадратная матрица порядка *n*. Определим правило преобразования векторов линейного пространства *V*: $\mathbf{A}: V \rightarrow V$ по формуле $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{e}\mathbf{A}\mathbf{u}$, где **u** – столбец координат вектора **u**. Такое правило задает линейный оператор, в чем несложно убедиться. Действительно, для любых векторов **u, v** ∈ *V* и любых действительных чисел α, β $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \mathbf{e}\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{e}\mathbf{A}\mathbf{u}) + \beta(\mathbf{e}\mathbf{A}\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{A}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{A}(\mathbf{v})$. Здесь использованы свойства умножения матриц. Вычислив для $j = 1, \dots, n$ столбец координат *j*-го вектора из базиса **e**, $\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{e} \mathbf{A}\mathbf{e}_j$, в силу того, что единица стоит в *j*-й строке $\mathbf{e}_j$, а в остальных – нули, убеждаемся, что он совпадает с *j*-м столбцом матрицы *A* и поэтому матрица заданного линейного оператора совпадает с исходной матрицей *A*.

§4. Матрица перехода

Матрица линейного оператора изменяется, когда изменяется базис линейного пространства. Определим, каковы эти изменения. Вспомним, что связь старого (исходного) и нового базисов отражается матрицей перехода.

Теорема 2.3. Матрицы $\mathbf{A}_e$ и $\mathbf{A}_b$ линейного оператора $\mathbf{A}: V \rightarrow V$, записанные в базисах **e** и **b** линейного пространства *V* соответственно, связаны друг с другом соотношением $\mathbf{A}_b = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_e \mathbf{U}$, где $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{e \rightarrow b}$ – матрица перехода от базиса **e** к базису **b**.

Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}$. Обозначим координаты векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в старом базисе $\mathbf{e}$ через $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{v}_e$, а в новом базисе $\mathbf{b}$ и $\mathbf{v}_b$. Поскольку действие линейного оператора в матричной форме в базисе $\mathbf{e}$ имеет вид $\mathbf{v}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}_e$ (см. теорему 2.1), а координаты векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в новом и старом базисах связаны между собой равенствами $\mathbf{u}_e = \mathbf{U}\mathbf{u}_b$ и $\mathbf{v}_e = \mathbf{U}\mathbf{v}_b$, получаем $\mathbf{v}_b = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{v}_e = \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{A}_e \mathbf{u}_e) = \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{A}_e \mathbf{U}\mathbf{u}_b) = (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}_e \mathbf{U})\mathbf{u}_b$. Равенство $\mathbf{v}_b = (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}_e \mathbf{U})\mathbf{u}_b$ является общим видом линейного оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{b}$ и поэтому $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}_e \mathbf{U} = \mathbf{A}_b$.

Приведенное доказательство теоремы хорошо иллюстрирует следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{u}_e & \xrightarrow{\mathbf{A}_e} & \mathbf{v}_e \\ \mathbf{U} \downarrow & & \uparrow \mathbf{U}^{-1} \\ \mathbf{u}_b & \xrightarrow{\mathbf{A}_b} & \mathbf{v}_b \end{array}$$

Квадратные матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ порядка n называют подобными, если существует такая невырожденная матрица $\mathbf{P}$, что $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$, т.е. матрицы, представляющие один и тот же оператор в разных базисах, подобны. Справедливо и обратное: если две матрицы подобны, то их можно рассматривать как матрицы одного оператора, но в разных базисах.

Теорема 2.4. Если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ подобны, то их определители равны.

Если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ подобны, то для них справедливо равенство $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$, где $\mathbf{P}$ – невырожденная матрица. Так как определитель квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц, а $|\mathbf{P}^{-1}| = |\mathbf{P}|^{-1}$, то получаем $|\mathbf{B}| = |\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}| = |\mathbf{P}^{-1}| |\mathbf{A}| |\mathbf{P}| = |\mathbf{A}|$.

Следствие. Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Следствие говорит о том, что, хотя матрица линейного оператора и изменяется при замене базиса, определитель ее при этом остается неизменным. Значит, этот определитель характеризует не конкретную матрицу оператора в конкретном базисе, а сам оператор. Поэтому определителем линейного оператора называют определитель его матрицы в каком-либо базисе.

Пример 2.9. Линейный оператор $\mathbf{A}: \mathbf{V}_3 \rightarrow \mathbf{V}_3$, определяемый формулой

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = [x, i], \text{ в базисе } i, j, k \text{ имеет матрицу } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Определитель этой}$$

матрицы равен нулю. Значит, и в любом другом базисе определитель матрицы этого линейного оператора равен нулю.

§5. Самосопряженный оператор

Пусть $\mathbf{E}$ – евклидово пространство. **Линейный оператор $\mathbf{A}^*: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$** называется **сопряженным к оператору $\mathbf{A}: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$** , если $(\mathbf{A}^*(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{A}(\mathbf{v}))$ для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{E}$. Данное определение оставляет открытыми два вопроса. Во-первых, не ясно, каждый ли линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве, имеет сопряженный. Во-вторых, из определения не видно,

однозначно или нет определяется сопряженный оператор. Прежде чем формулировать теорему, отвечающую на оба эти вопроса, докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма Рисса. Если квадратные матрицы M и N порядка n таковы, что для любых вектор-столбцов $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется соотношение $x^T M y = x^T N y$, то $M = N$.

Пусть m_{ij}, n_{ij} – элементы матриц M и N соответственно, стоящие в i -й строке и j -м столбце. Для произвольной пары индексов i и j выберем такие вектор-столбцы x и y :

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-я строка}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-я строка},$$

в которых присутствует только один ненулевой элемент, равный единице и стоящий на указанном месте. Записав равенство $x^T M y = x^T N y$ с выбранными столбцами x и y и вычислив оба произведения, стоящих в равенстве, получаем $m_{ij} = n_{ij}$. Так как пара индексов может быть выбрана совершенно произвольно, то можно выбором перебрать все возможные номера элементов матриц, то есть получаем, что все элементы матрицы M совпадают с соответствующими по номеру элементами матрицы N , или $M = N$.

Теорема 2.5. Любому линейному оператору $A: E \rightarrow E$ соответствует единственный сопряженный оператор A^* , причем его матрицей в любом ортонормированном базисе e является матрица A^T . транспонированная матрица линейного оператора A в том же базисе e .

Доказательство теоремы основано на том, что фиксированный базис евклидова пространства E позволяет установить взаимно однозначное соответствие между линейными операторами, действующими в пространстве E , и матрицами $M_n(\mathbb{R}^n)$, $n = \dim E$. Это соответствие заключается в сопоставлении линейному оператору его матрицы в фиксированном базисе.

Докажем, что линейный оператор B с матрицей $B = A^T$ в базисе e является сопряженным к линейному оператору A . Для этого достаточно проверить выполнение равенства $(B(u), v) = (u, A(v))$ для любой пары $u, v \in E$.

Пусть u, v – столбцы координат векторов u, v в базисе e . Тогда вектор $A(v)$ имеет столбец координат Av , а правая часть равенства равна $u^T(Av)$, что следует из ортонормированности базиса. Аналогично, левая часть этого равенства имеет вид $(Bu)^T v$. Следовательно, в координатной форме рассматриваемое равенство запишется $(Bu)^T v = u^T(Av)$. Так как $(Bu)^T = u^T B^T$ в силу свойств матричных операций, то $(Bu)^T = u^T (A^T)^T = u^T A$ и получаем после подстановки в левую часть доказываемого равенства: $u^T A v = u^T(Av)$ – тождество.

Если некоторый линейный оператор B является сопряженным к линейному оператору A , то для любых векторов $u, v \in E$ выполняется равенство

$(B(u), v) = (u, A(v))$. Значит, для матриц A и B этих операторов равенство $(Bu)^T v = u^T (Av)$ выполняется для любых столбцов x и y . Согласно доказанной лемме, $B = A^T$. Поэтому линейный оператор определен однозначно, так как однозначно определена его матрица.

В некоторых случаях линейный оператор, сопряженный к данному линейному оператору, можно найти, не вычисляя матрицы этого оператора.

Пример 2.10. Вектор $a \in V_3$ порождает линейный оператор $A: V_3 \rightarrow V_3$ согласно формуле $A(x) = [a, x]$. Оператор, сопряженный к оператору A , можно определить, опираясь на свойства скалярного, смешанного и векторного произведений:

$$(A(x), y) = ([a, x], y) = axy = yax = ([y, a], x) = (x, [y, a]) = (x, -[a, y]) = (x, -Ay).$$

Из приведенных соотношений видно, что $A^* = -A$. (Напомним, что смешанным произведением трех векторов u, v, w , взятых в указанном порядке, называется число, равное скалярному произведению вектора u на векторное произведение $[v, w]$).

136 Самосопряженный оператор A – такой оператор, который совпадает со своим сопряженным, то есть $A^* = A$. Поскольку оператор A сопряжен самому себе, то для любых векторов u, v выполняется равенство $(A(u), v) = (u, A(v))$.

Пример 2.11. Простейшие линейные операторы – нулевой Θ и тождественный I – являются самосопряженными, так как для любых векторов u, v выполняется $(I(u), v) = (u, v) = (u, I(v))$, $(\Theta(u), v) = (0, v) = 0 = (u, 0) = (u, \Theta(v))$.

Пример 2.12. Рассмотрим линейное пространство векторов V_3 с обычным скалярным произведением векторов (u, v) . Правило $A: V_3 \rightarrow V_3$ ортогонального проектирования векторов из V_3 на направление вектора a единичной длины, которое определяется формулой $A(u) = (u, a)a$, является линейным оператором, так как $A(\alpha u + \beta v) = (\alpha u + \beta v, a)a = \alpha(u, a)a + \beta(v, a)a = \alpha A(u) + \beta A(v)$. Убедимся, что этот оператор является самосопряженным: $(A(u), v) = ((u, a)a, v) = (u, a) \cdot (a, v) = (u, (a, v)a) = (u, (v, a)a) = (u, A(v))$. Приведенные рассуждения не используют специфику пространства V_3 и могут быть проведены в произвольном евклидовом пространстве. Любой единичный вектор a евклидова пространства E порождает линейный оператор P_a ортогонального проектирования на линейное подпространство $H = L(a)$ согласно формуле $P_a(u) = (u, a)a$, и этот оператор является самосопряженным.

Вспомним [3], что квадратная матрица A , для которой выполняется равенство $A = A^T$, называется **симметрической**.

Теорема 2.6. Матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе является симметрической. Наоборот, если матрица линейного оператора является симметрической в некотором ортонормированном базисе, то этот оператор – самосопряженный.

Согласно определению самосопряженного оператора A для него выполняется равенство: $A = A^*$, т.е. линейный оператор равен своему сопряженному оператору. Это эквивалентно тому, что матрица линейного оператора в ортонормированном базисе совпадает со своей транспонированной (поскольку она является матрицей сопряженного оператора в этом базисе). Такие матрицы и называют симметрическими. С другой стороны, если в каком-то ортонормированном базисе матрица A оператора оказывается симметрической,

то есть она совпадает со своей транспонированной матрицей A^T , то оператор A , соответствующий матрице A , и оператор A^* , соответствующий матрице A^T , оказываются одним и тем же оператором, то есть $A = A^*$ и оператор A – самосопряженный.

1.3.8 Ортогональной матрицей $U = (u_{ij})_{n,n}$ называют матрицу, элементы которой удовлетворяют равенству $\sum_{i=1}^n u_{ik} u_{im} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq m \\ 1, & \text{если } k = m \end{cases}$. Исходя из

определения произведения двух матриц, можно условие ортогональности матрицы U записать в матричном виде, а именно, если для матрицы U выполняется условие $U^T U = E$, где U^T – транспонированная матрица, а E – единичная матрица, то матрица U – ортогональная. Действительно, элемент

с номером km матрицы $B = U^T U$ имеет вид $b_{km} = \sum_{i=1}^n u_{ki}^T u_{im} = \sum_{i=1}^n u_{ik} u_{im}$, и для

ортогональной матрицы U $b_{km} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq m \\ 1, & \text{если } k = m \end{cases}$, т.е. матрица B является

единичной матрицей E .

Пример 2.13. Простейшей ортогональной матрицей является единичная матрица E , так как $E^T E = EE = E$. Напротив, нулевая матрица не является ортогональной: $\Theta^T \Theta = \Theta \neq E$.

Пример 2.14. Матрица $U = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ является ортогональной,

поскольку

$$\begin{aligned} U^T U &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Из определения вытекает ряд свойств ортогональных матриц.

Свойство 1. Определитель ортогональной матрицы U может иметь одно из двух возможных значений $|U| = \pm 1$. Согласно равенству $U^T U = E$, имеем $|U^T U| = |E|$. Вспомнив, что определитель произведения матриц равен произведению их определителей, а определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы, получим $|U^T U| = |U^T| |U| = |U|^2 = |E|$, следовательно, $|U| = \pm 1$.

Свойство 2. Матрица, обратная к ортогональной матрице U , совпадает с ее транспонированной матрицей, то есть $U^{-1} = U^T$.

Согласно свойству 1, ортогональная матрица невырождена и потому имеет обратную матрицу U^{-1} . Умножая условие ортогональности справа на матрицу U^{-1} , получаем $(U^T U) U^{-1} = E U^{-1}$. Так как $(U^T U) U^{-1} = U^T (U U^{-1}) = U^T$, а $E U^{-1} = U^{-1}$, то $U^T = U^{-1}$.

Свойство 3. Произведение ортогональной матрицы U на транспонированную к ней равно единичной матрице: $U U^T = E$.

Согласно свойству 2 и определению обратной матрицы, $UU^T = UU^{-1} = E$.

Свойство 4. Матрица, транспонированная к ортогональной матрице, тоже является ортогональной.

Покажем, что для произвольной матрицы U имеет место равенство $(U^T)^T U^T = E$, представляющее собой запись определения ортогональной матрицы для матрицы U^T . Так как для операции транспонирования справедливо свойство $(U^T)^T = U$, доказываемое равенство эквивалентно равенству $U U^T = E$, которое верно в силу свойства 3.

Свойство 5. Произведение двух ортогональных матриц U и Q одного порядка является ортогональной матрицей.

Для доказательства достаточно проверить выполнение определения ортогональности для матрицы UQ : $(UQ)^T UQ = (U^T Q^T) UQ = Q^T (U^T U) Q = Q^T E Q = Q^T Q = E$.

Свойство 6. Матрица, обратная к ортогональной матрице, тоже является ортогональной.

Согласно свойству 1, ортогональная матрица невырождена, а потому имеет обратную. Согласно свойству 2, матрица, обратная к ортогональной, совпадает с транспонированной. Наконец, согласно свойству 4, матрица, транспонированная к ортогональной, является ортогональной.

Рассмотрим в евклидовом пространстве E линейный оператор $A: E \rightarrow E$, сохраняющий скалярное произведение в E . Такой оператор называют ортогональным оператором, а его свойство сохранять скалярное произведение в E означает, что для любых векторов $u, v \in E$ выполняется равенство $(A(u), A(v)) = (u, v)$. Так как ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение, то он сохраняет норму (длину) вектора. Действительно, $|A(u)|^2 = (A(u), A(u)) = (u, u) = |u|^2$. Отсюда, в частности, следует, что если векторы u и v – ненулевые, то и векторы $A(u)$, $A(v)$ – ненулевые. Справедливо и обратное утверждение, что оператор, сохраняющий евклидову норму, является ортогональным оператором.

Пример 2.15. В пространствах V_2 и V_3 свободных векторов ортогональными являются линейные операторы, сохраняющие расстояние. Например, линейный оператор поворота вектора на фиксированный угол является ортогональным, так как при таком повороте длины векторов не изменяются. Линейный оператор симметрии относительно прямой на плоскости или относительно плоскости в пространстве также является ортогональным.

Теорема 2.7. Пусть $A: E \rightarrow E$ – ортогональный оператор в евклидовом пространстве E и $e = (e_1, \dots, e_n)$ – произвольный ортонормированный базис в E . Тогда система векторов $A(e) = (A(e_1), \dots, A(e_n))$ является ортонормированным базисом в E .

Достаточно подсчитать все парные скалярные произведения векторов $A(e)$.

В силу ортогональности оператора A имеем $(A(e_i), A(e_j)) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$.

Итак, различные векторы $A(e_i)$ и $A(e_j)$ ортогональны, а норма каждого из них равна единице. Поэтому система векторов $A(e) = (A(e_1), \dots, A(e_n))$ состоит из ненулевых векторов и ортогональна, а следовательно, она линейно независима. Количество векторов в линейно независимой системе $A(e)$ равно $n = \dim E$, и поэтому это базис, притом ортонормированный.

Теорема 2.8. Если линейный оператор $A: E \rightarrow E$ в евклидовом пространстве E переводит какой-либо ортонормированный базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в ортонормированный базис $A(e) = (A(e_1), \dots, A(e_n))$, то этот оператор ортогональный.

Если вектор u имеет столбец координат $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ в базисе e , то его образ $A(u)$ имеет тот же столбец координат в базисе $A(e)$, так как согласно определению линейного оператора, $A(u) = A(u_1 e_1 + \dots + u_n e_n) = u_1 A(e_1) + \dots + u_n A(e_n)$. Выберем два произвольных вектора $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$, $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$. Их скалярное произведение в ортонормированном базисе e выражается формулой $(u, v) = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, но той же формулой выражается и скалярное произведение $(A(u), A(v))$, если взять в качестве базиса $A(e)$. Поэтому соотношение $(A(u), A(v)) = (u, v)$ выполняется для любых векторов $u, v \in E$, что, согласно определению, означает ортогональность оператора A .

Теорема 2.9. Если матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе ортогональна, то этот оператор является ортогональным. Наоборот, матрица ортогонального оператора в любом ортонормированном базисе является ортогональной.

Выберем в евклидовом пространстве E любой ортонормированный базис e . Тогда для любых векторов u, v , имеющих в этом ортонормированном базисе столбцы координат u, v соответственно, выполнено равенство $(u, v) = u^T v$ (это запись скалярного произведения в ортонормированном базисе).

Пусть матрица A линейного оператора A в ортонормированном базисе является ортогональной. Тогда выполнено соотношение $A^T A = E$ и, следовательно, равенство $u^T (A^T A) v = u^T E v = u^T v$ верно для любых столбцов u и v . Но это равенство представляет собой матричную запись равенства скалярных произведений $(A(u), A(v)) = (u, v)$ для векторов $u, v \in E$, имеющих в этом ортонормированном базисе столбцы координат u, v . Мы приходим к заключению, что оператор A ортогональный. Докажем обратное утверждение. В любом ортогональном базисе соотношение $(A(u), A(v)) = (u, v)$ в координатах имеет вид $(Au)^T (Av) = u^T v$, то есть его можно записать в виде $u^T (A^T A) v = u^T E v$, а ранее доказали лемму, что из этого равенства, выполняющегося для любых столбцов u и v , следует равенство матриц $A^T A = E$, что и означает ортогональность матрицы A .

Теорема 2.10. В евклидовом пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является ортогональной.

Рассмотрим в произвольном n -мерном евклидовом пространстве E два ортонормированных базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$. Пусть C – матрица перехода от f к e . Как следует из определения матрицы перехода, элементы матрицы C являются координатами векторов f_j по базису e . Непосредственным умножением нетрудно убедиться, что $C^T C = E$, поскольку элементами этой матрицы будут являться записанные в координатах скалярные произведения (e_i, e_j) , которые в силу ортонормированности базиса e равны нулю при $i \neq j$ и единице при $i = j$. Согласно определению, доказанное равенство означает, что матрица C – ортогональная.

Теорема 2.11. Пусть e – ортонормированный базис в n -мерном евклидовом пространстве E . Любая ортогональная матрица C порядка n является матрицей перехода из базиса e в некоторый другой ортонормированный базис.

Столбцы матрицы C можно рассматривать как координаты в базисе e некоторых векторов $f_1, \dots, f_n$ пространства E . Матрица $C^T C$ есть не что иное, как матрица Грама для системы векторов $f_1, \dots, f_n$, так как элемент этой матрицы в i -й строке и j -м столбце равен $f_i^T f_j$, что представляет собой запись в координатах в ортонормированном базисе скалярного произведения (f_i, f_j) . Равенство $C^T C = E$ означает, что векторы $f_1, \dots, f_n$ попарно ортогональны и имеют единичную длину. Поэтому указанная система векторов является линейно независимой, а так как количество векторов в системе совпадает с размерностью n евклидова пространства, то она является базисом. Этот базис ортонормированный, а матрица C есть матрица перехода из базиса e в базис f .

Замечание. Любое линейное преобразование (линейный оператор) линейного пространства представляет собой отображение пространства в себя: каждый вектор линейного пространства меняет свое положение и переходит в свой образ. Преобразование координат не затрагивает элементов пространства, а лишь отражает изменение системы отсчета (базиса). Можно сказать, что преобразование пространства – это изменение окружающего пространства, а преобразование координат – это изменение положения наблюдателя. Эта физическая аналогия показывает, в чем различие между двумя понятиями.

Матрица A линейного оператора A при замене базиса преобразуется по формуле $A' = U^{-1}AU$, где U – матрица перехода. В евклидовом пространстве при переходе от одного ортонормированного базиса к другому матрица перехода U является ортогональной, и такая матрица удовлетворяет, как показано выше, свойству $U^{-1} = U^T$. Поэтому для случая ортонормированных базисов формулу преобразования матрицы линейного оператора можно записать следующим образом: $A' = U^T A U$.

ГЛАВА 3. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Определение и примеры

Ненулевой вектор v в линейном пространстве V , удовлетворяющий соотношению $A(v) = \lambda v$, где $A: V \rightarrow V$ – линейный оператор, называется **собственным вектором оператора A** . Число λ , для которого выполняется соотношение $A(v) = \lambda v$, называется **собственным значением (собственным числом)**, соответствующим собственному вектору v оператора A .

Пример 3.1. В линейном пространстве $K_n[x]$ многочленов степени не выше n содержатся многочлены нулевой степени, то есть постоянные функции.

Так как $\frac{dc}{dx} = 0 = 0 \cdot c$, многочлены нулевой степени $p(x) = c \neq 0$ являются собственными векторами линейного оператора дифференцирования, а число $\lambda = 0$ – собственным значением этого оператора.

Множество собственных значений линейного оператора является спектром линейного оператора. Каждый собственный вектор связан со своим собственным значением. Действительно, если вектор v одновременно удовлетво-

решает двум равенствам $\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, $\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \mu \mathbf{v}$, то $\lambda \mathbf{v} = \mu \mathbf{v}$, откуда $(\lambda - \mu)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Если $\lambda - \mu \neq 0$, умножим равенство на число $(\lambda - \mu)^{-1}$ и в результате получим, что $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Но это противоречит определению собственного вектора, так как собственный вектор всегда ненулевой.

Каждому собственному значению отвечают свои собственные векторы, причем таких бесконечно много. Действительно, если $\mathbf{v}$ – собственный вектор линейного оператора $\mathbf{A}$ с собственным значением λ , то есть $\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, то для любого ненулевого действительного числа α имеем $\alpha \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{A}(\alpha \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{A}(\mathbf{v})) = \alpha \lambda \mathbf{v} = \lambda(\alpha \mathbf{v})$. Значит, и вектор $\alpha \mathbf{v}$ является для линейного оператора собственным с тем же собственным значением λ .

Часто говорят о собственных значениях (числах), спектре и собственных векторах квадратной матрицы. При этом имеют в виду следующее. Матрица $\mathbf{A}$ порядка n является матрицей некоторого линейного оператора в фиксированном базисе, действующем в n -мерном линейном пространстве. Например, если остановиться на стандартном базисе в линейном арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$, то матрица $\mathbf{A}$ определяет линейный оператор $\mathbf{A}$, отображающий вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ со столбцом координат $\mathbf{v}$ в вектор со столбцом координат $\mathbf{A}(\mathbf{v})$. Матрицей $\mathbf{A}$ как раз и является матрица $\mathbf{A}$. Естественно отождествить оператор с его матрицей аналогично тому, как арифметический вектор отождествляется со столбцом своих координат. Такое отождествление, которое часто используют и при этом не всегда оговаривают, позволяет перенести на матрицы “операторные” термины.

§2. Характеристический многочлен и его корни

Для произвольной квадратной матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ порядка n рассмотрим определитель

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, а λ – действительное переменное. Относительно переменного λ этот определитель является многочленом степени n и может быть записан в виде

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k d_k \lambda^k,$$

где коэффициенты $(-1)^k$ введены для удобства. Многочлен n -й степени от λ , равный $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$, называется **характеристическим многочленом матрицы $\mathbf{A}$** , а уравнение $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ – **характеристическим уравнением матрицы $\mathbf{A}$** . Множество значений λ , для которых $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$, называется **корнями характеристического уравнения матрицы $\mathbf{A}$** .

Пример 3.2. Найдем характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для этого раскроем определитель:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda) - 9) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 30\lambda - 35.$$

Итак, характеристическое уравнение заданной матрицы имеет вид:

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 30\lambda - 35 = 0.$$

Квадратную матрицу можно использовать в качестве значения переменного в произвольном многочлене. Тогда значением многочлена от матрицы будет матрица того же порядка, что и исходная. Интерес представляют такие многочлены, значения которых от данной матрицы есть нулевая матрица. Их называют аннулирующими многочленами. Оказывается, что одним из аннулирующих многочленов для матрицы является ее характеристический многочлен.

Известно, что характеристические многочлены (уравнения) подобных матриц совпадают. Рассмотрим квадратные матрицы A и B одного порядка, причем подобные. Тогда существует такая невырожденная матрица U того же порядка, что $B = U^{-1}AU$. Тогда в силу свойств определителей имеем

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E) = \det(U^{-1}AU - \lambda U^{-1}EU) = \det(U^{-1}(A - \lambda E)U) = \\ &= \det U^{-1} \det(A - \lambda E) \det U = \det(A - \lambda E) = P_A(\lambda). \end{aligned}$$

Рассмотрим линейный оператор $A: V \rightarrow V$, действующий в линейном пространстве V . Выберем в линейном пространстве некоторый базис e и запишем в этом базисе матрицу $A = (a_{ij})$ линейного оператора A . В пространстве линейных операторов матрица $A - \lambda E$ является матрицей линейного оператора $A - \lambda I$, где I – тождественный оператор. Определитель $\det(A - \lambda E)$ матрицы линейного оператора $A - \lambda I$, согласно доказанному выше, от выбора базиса не зависит. Значит, характеристический многочлен $P_A(\lambda)$ матрицы A является также характеристическим многочленом любой другой матрицы оператора A и совпадает с определителем линейного оператора $A - \lambda I$. Мы можем в дальнейшем называть характеристическим многочленом оператора $A: V \rightarrow V$ характеристический многочлен его матрицы, записанной в некотором базисе, а характеристическим уравнением этого оператора – характеристическое уравнение матрицы A . При этом характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. Коэффициенты характеристического многочлена также не связаны с используемым базисом, т.е. являются инвариантами относительно выбора базиса. Другими словами, коэффициенты характеристического многочлена отражают свойства самого оператора, а не его матрицы A , являющейся записью оператора в конкретном базисе.

Пример 3.3. В линейном пространстве $K_2[x]$ многочленов степени не выше двух элементы $1, x, x^2$ образуют базис. Матрица A линейного оператора

дифференцирования в этом базисе имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Вычислив определитель $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$ и приравняв его нулю, получим

характеристическое уравнение этого линейного оператора: $\lambda^3 = 0$. Такое же характеристическое уравнение матрица A будет иметь и в любом другом базисе. Спектр линейного оператора в линейном пространстве над полем действительных чисел состоит из единственного действительного собственного значения этого оператора $\lambda = 0$.

Спектр линейного оператора тесно связан с его характеристическим уравнением.

Теорема 3.1. Для того чтобы число λ являлось собственным значением линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы оно было корнем характеристического уравнения этого оператора.

Необходимость. Пусть число λ является собственным значением линейного оператора $A: V \rightarrow V$. Это значит, что существует вектор $v \neq 0$, для которого

$$A(v) = \lambda v. \quad (3.1)$$

Отметим, что в V действует тождественный оператор $I: Iv = v$ для любого вектора v . Используя этот оператор, преобразуем равенство (3.1) к виду $A(v) = \lambda Iv$, или

$$(A - \lambda I)(v) = 0. \quad (3.2)$$

Запишем векторное равенство (3.2) в каком-либо базисе e . Матрицей линейного оператора $A - \lambda I$ будет матрица $A - \lambda E$, где A – матрица линейного оператора A в базисе e , E – единичная матрица, v – столбец координат собственного вектора v . Тогда $v \neq 0$, а векторное равенство (3.2) равносильно матричному $(A - \lambda E)v = 0$, которое представляет собой матричную форму записи однородной системы алгебраических уравнений с квадратной матрицей $A - \lambda E$ порядка n . Эта система имеет ненулевое решение, являющееся столбцом координат v собственного вектора v . Поэтому матрица $A - \lambda E$ системы алгебраических уравнений имеет нулевой определитель, то есть $\det(A - \lambda E) = 0$. А это означает, что λ является корнем характеристического уравнения линейного оператора A .

Достаточность. Легко убедиться, что приведенные рассуждения можно провести в обратном порядке. Если λ является корнем характеристического уравнения, то в заданном базисе e выполняется равенство $\Delta = \det(A - \lambda E) = 0$. Следовательно, матрица однородной системы алгебраических уравнений, записанной в матричной форме, вырождена, и система имеет ненулевое решение v . Это ненулевое решение представляет собой набор координат в базисе e некоторого ненулевого вектора v , для которого выполняется

векторное равенство $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ или эквивалентное ему равенство $\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{I} \mathbf{v}$. Мы приходим к выводу, что число λ является собственным значением линейного оператора $\mathbf{A}$.

Доказанная теорема говорит о том, что **корни характеристического уравнения** – множество значений λ , для которых $P_A(\lambda) = 0$, являются собственными значениями оператора $\mathbf{A}$.

Каждому собственному значению λ матрицы (линейного оператора) сопоставляют его кратность, полагая ее равной кратности корня λ характеристического уравнения этой матрицы (этого линейного оператора).

Множество всех собственных векторов, отвечающих данному собственному значению линейного оператора, не является линейным подпространством, так как это множество не содержит нулевого вектора, который, по определению, не может быть собственным. Но это формальное и легко устранимое препятствие является единственным. Обозначим через $S(\mathbf{A}, \lambda)$ множество всех собственных векторов линейного оператора $\mathbf{A}$ в линейном пространстве V , отвечающих собственному значению λ , с добавленным к этому множеству нулевым вектором.

Теорема 3.2. Множество $S(\mathbf{A}, \lambda)$ является линейным подпространством в V .

Выберем произвольные два вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S(\mathbf{A}, \lambda)$ и докажем, что для любых действительных α, β вектор $\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$ также принадлежит $S(\mathbf{A}, \lambda)$. Для этого вычислим образ этого вектора под действием линейного оператора $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\alpha \mathbf{u}) + \mathbf{A}(\beta \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{A}(\mathbf{u}) + \beta \mathbf{A}(\mathbf{v}) = \alpha(\lambda \mathbf{u}) + \beta(\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\alpha \mathbf{u}) + \lambda(\beta \mathbf{v}) = \lambda(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v})$. Таким образом, для вектора $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$ выполняется соотношение $\mathbf{A}(\mathbf{w}) = \lambda \mathbf{w}$. Если $\mathbf{w}$ – нулевой вектор, то он принадлежит $S(\mathbf{A}, \lambda)$. Если же он ненулевой, то, согласно доказанному соотношению, он является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ и опять-таки принадлежит множеству $S(\mathbf{A}, \lambda)$.

Совокупность всех собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, отвечающих данному собственному значению, называют **собственным подпространством**, отвечающим данному собственному значению. Оно является частным случаем инвариантного подпространства линейного оператора $\mathbf{A}$ – такого линейного подпространства H , что для любого вектора $\mathbf{u} \in H$ вектор $\mathbf{A} \mathbf{u}$ также принадлежит H . Инвариантным подпространством линейного оператора является также линейная оболочка любой системы его собственных векторов. Инвариантным подпространством линейного оператора, не связанным с его собственными векторами, является образ оператора (результат действия оператора на вектор).

Теорема 3.3. Пусть собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ линейного оператора $\mathbf{A}$ попарно различны. Тогда система соответствующих им собственных векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$ линейно независима.

Доказательство опирается на метод математической индукции, проводимой по количеству r векторов в системе. При $r = 1$ утверждение теоремы верно, так как линейная независимость системы из одного вектора означает, что этот вектор ненулевой, а собственный вектор, согласно определению, является ненулевым. Пусть утверждение верно при $r = m$, то есть для произвольной системы из m векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$. Добавим к системе

векторов еще один собственный вектор $\mathbf{e}_{m+1}$, отвечающий собственному значению λ_{m+1} , и докажем, что расширенная таким способом система векторов останется линейно независимой. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию полученной системы собственных векторов и предположим, что она равна нулевому вектору: $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{e}_m + \alpha_{m+1} \mathbf{e}_{m+1} = \mathbf{0}$. К этому равенству применим линейный оператор $\mathbf{A}$ и в результате получим еще одно векторное равенство $\mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{e}_m + \alpha_{m+1} \mathbf{e}_{m+1}) = \alpha_1 \mathbf{A}(\mathbf{e}_1) + \dots + \alpha_m \mathbf{A}(\mathbf{e}_m) + \alpha_{m+1} \mathbf{A}(\mathbf{e}_{m+1}) = \mathbf{0}$. Учтем, что векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ являются собственными: $\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m \mathbf{e}_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} \mathbf{e}_{m+1} = \mathbf{0}$. Умножив исходную линейную комбинацию для векторов на λ_{m+1} , получим $\alpha_1 \lambda_{m+1} \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_m \lambda_{m+1} \mathbf{e}_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} \mathbf{e}_{m+1} = \mathbf{0}$. Вычитая это равенство из предыдущего, получим линейную комбинацию векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$, равную нулевому вектору: $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_m (\lambda_m - \lambda_{m+1}) \mathbf{e}_m = \mathbf{0}$. А так как система векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ по предположению линейно независима, делаем вывод, что у полученной комбинации все коэффициенты равны нулю: $\alpha_k (\lambda_k - \lambda_{m+1}) = 0$, $k = 1, \dots, m$. Поскольку все собственные значения попарно различны, то из этих равенств следует, что $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$. Значит, соотношение для линейной комбинации $m+1$ векторов запишется в виде $\alpha_{m+1} \mathbf{e}_{m+1} = \mathbf{0}$. Так как вектор $\mathbf{e}_{m+1}$ ненулевой (как собственный вектор), то $\alpha_{m+1} = 0$. В итоге получаем, что линейная комбинация для векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}$ равна нулевому вектору только в случае равенства всех ее коэффициентов нулю. Тем самым мы доказали, что система векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}$ линейно независима.

Теорема 3.4. Матрица линейного оператора $\mathbf{A}$, действующего в линейном пространстве, в данном базисе является диагональной тогда и только тогда, когда все векторы базиса являются собственными для оператора $\mathbf{A}$.

Пусть $\mathbf{A}$ – матрица линейного оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Согласно определению j -м столбцом матрицы $\mathbf{A}$ является столбец координат вектора $\mathbf{A}\mathbf{e}_j$. Если матрица $\mathbf{A}$ является диагональной, то произвольно взятый ее j -й столбец имеет вид $(0 \dots 0 \ c_j \ 0 \dots 0)^T$ (единственный ненулевой элемент может стоять на j -м месте). Для вектора $\mathbf{A}\mathbf{e}_j$ получаем представление $\mathbf{A}\mathbf{e}_j = (0 \dots 0 \ c_j \ 0 \dots 0)^T = c_j \mathbf{e}_j$, которое как раз и означает, что вектор $\mathbf{e}_j$ является собственным с собственным значением c_j . Значит, все базисные векторы являются собственными, а все диагональные элементы матрицы $\mathbf{A}$ – собственными значениями. Верно и обратное. Если каждый вектор $\mathbf{e}_j$ является собственным для линейного оператора $\mathbf{A}$ и ему отвечает собственное значение c_j , то $\mathbf{A}\mathbf{e}_j = c_j \mathbf{e}_j = (0 \dots 0 \ c_j \ 0 \dots 0)^T$, то есть в матрице оператора $\mathbf{A}$ в этом базисе равны нулю все элементы, кроме диагональных, а диагональный элемент в j -м столбце равен c_j .

Следствие. Если характеристическое уравнение линейного оператора, действующего в n -мерном пространстве, имеет n попарно различных корней, то существует базис, в котором матрица этого оператора является диагональной.

Каждый корень характеристического уравнения является собственным значением линейного оператора. Каждому из таких корней можно поставить в соответствие хотя бы по одному собственному вектору. Система выбранных таким образом векторов является по теореме линейно независимой, а так как количество векторов в ней равно размерности линейного пространства, она является базисом. Этот базис состоит из собственных векторов, а следовательно, матрица линейного оператора в этом базисе имеет диагональный вид.

Если характеристическое уравнение линейного оператора имеет кратные корни, то такой линейный оператор может иметь диагональную матрицу в некотором базисе, но так бывает не всегда.

Пример 3.4. В двумерном линейном пространстве (например, в R^2) рассмотрим линейные операторы, матрицы которых в некотором базисе имеют

вид $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Характеристические уравнения этих операторов совпадают

и имеют вид $(\lambda - 2)^2 = 0$. Поэтому оба оператора имеют единственное собственное значение $\lambda = 2$ кратности 2. Матрица первого линейного оператора уже имеет диагональный вид, то есть исходный базис состоит из собственных векторов этого оператора. Можно показать, что любой ненулевой вектор для этого оператора является собственным и потому для него любой базис есть базис из собственных векторов. У второго линейного оператора все собственные векторы отвечают собственному значению 2, но собственное подпространство линейного оператора для этого собственного значения одномерно. Следовательно, найти два линейно независимых собственных вектора для этого линейного оператора невозможно и базиса из собственных векторов не существует.

Из вышеизложенного следует, что в определенных ситуациях линейный оператор в некотором базисе имеет диагональную матрицу. Чтобы это было так, оператор должен иметь базис из собственных векторов. Изменение базиса вызывает замену матрицы оператора подобной ей матрицей. Замену матрицы A диагональной матрицей A' , подобной A , называют приведением матрицы к диагональному виду. Задача приведения матрицы к диагональному виду может решаться самостоятельно, вне зависимости от изучения конкретного оператора. Она состоит в подборе для данной матрицы A такой невырожденной матрицы P , что матрица $A' = P^{-1}AP$ является диагональной. Решение этой задачи опирается на следующий факт.

Теорема 3.5. Для любой симметрической матрицы M существует такая

ортогональная матрица U , что $D = U^{-1}MU$, где $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ – диагональная

матрица, диагональными элементами которой являются собственные значения матрицы M , повторяющиеся согласно их кратности.

Действительно, для симметрической матрицы M порядка n существует такая невырожденная матрица P , что $P^{-1}MP = D$, где в последовательности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ указаны все собственные значения матрицы M с учетом их кратностей, причем матрица P является (см. следствие) матрицей перехода между ортонормированными базисами. Поэтому P – ортогональная матрица и $P^{-1} = P^T$. Следовательно, $P^T M P = P^{-1} M P = D$ и матрица $U = P$ – и говорят, что ортогональным преобразованием матрица A приводится к диагональному виду.

Чтобы найти матрицу U , осуществляющую ортогональное преобразование, необходимо:

- 1) найти собственные значения матрицы M ;

2) для каждого собственного значения найти набор собственных векторов, соответствующих этому собственному значению, при этом эти собственные векторы должны быть линейно независимыми и их количество должно равняться кратности собственного значения;

3) преобразовать системы собственных векторов, полученные для каждого собственного значения, в ортонормированные при помощи процесса ортогонализации. Объединить ортонормированные системы для каждого собственного значения в единую систему векторов, которая будет ортонормированным базисом евклидова пространства;

4) выписать матрицу U , столбцами которой являются координаты векторов построенной ортонормированной системы.

Пример 3.5. Выясним, можно ли привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

Если это возможно, найдем соответствующую диагональную матрицу и матрицу преобразования подобия. Найдем собственные значения данной матрицы. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и решая характеристическое уравнение, находим его корни: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Видим, что имеются два собственных значения, причем одно из них кратности 2. Матрицу можно привести к диагональному виду, если сумма размерностей всех собственных подпространств равна размерности линейного пространства, в нашем случае – трем. Отметим, что размерность собственного подпространства линейного оператора (матрицы) не превышает кратности соответствующего собственного значения. Проверим это на собственном подпространстве, отвечающем собственному значению $\lambda_1 = -1$, для чего вычислим ранг матрицы $A - \lambda_1 E$:

$$\text{Rg}(A - \lambda_1 E) = \text{Rg} \begin{vmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{vmatrix} = 2.$$

Значит, размерность первого собственного подпространства равна $3 - 2 = 1$. Аналогично находим размерность второго собственного подпространства. Вычисляем ранг соответствующей матрицы $A - \lambda_2 E$:

$$\text{Rg}(A - \lambda_2 E) = \text{Rg} \begin{vmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{vmatrix} = 1.$$

Размерность второго собственного подпространства равна $3 - 1 = 2$. Сумма размерностей обоих подпространств равна трем. Следовательно, базис из собственных векторов существует. Он собирается из базисов собственных подпространств. Чтобы его построить, нужно для каждого собственного значения λ найти фундаментальную систему решений системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda E)x = 0$. Фундаментальная система решений представляет собой базис линейного пространства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений, а в нашем случае собственного подпространства матрицы. Для собственного значения $\lambda_1 = -1$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен 2, поэтому фундаментальная система состоит из одного столбца. Например, можно взять столбец $(3 \ 5 \ 6)^T$. Для собственного значения $\lambda_2 = 1$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 1, поэтому фундаментальная система состоит из двух столбцов. Например, фундаментальную систему решений составляют столбцы $(2 \ 1 \ 0)^T$ и $(0 \ 1 \ 2)^T$. Таким образом, базисом из собственных векторов матрицы A является система

$$e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

а сама матрица A подобна диагональной матрице $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, причем в этом

случае $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица преобразования подобия представляет собой матрицу перехода из одного базиса в другой, то есть ее столбцы представляют собой столбцы координат векторов нового базиса, записанные в старом.

§3. Алгоритм вычисления собственных векторов линейного оператора

Характеристическое уравнение линейного оператора $A: V \rightarrow V$, действующего в n -мерном линейном пространстве V , – это алгебраическое уравнение n -й степени с действительными коэффициентами. Среди его корней могут быть комплексные числа, но эти корни не во всяком линейном пространстве относят к собственным значениям линейного оператора, так как, согласно определению, собственное значение линейного оператора – действительное число. Чтобы комплексные корни характеристического уравнения можно было рассматривать как собственные значения линейного оператора, в линейном пространстве должно быть определено умножение вектора на любые комплексные числа.

Как следует из доказательства теоремы 3.5, чтобы вычислить собственные значения линейного оператора A и найти его собственные векторы, нужно выполнить следующие операции:

1) выбрать в линейном пространстве базис и сопоставить оператору A матрицу A этого линейного оператора в выбранном базисе;

2) составить характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найти все его действительные корни λ_k , которые и будут собственными значениями оператора;

3) для каждого собственного значения λ_k найти фундаментальную систему решений для однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda_k E)x = 0$. Столбцы фундаментальной системы решений представляют собой координаты векторов некоторого базиса в собственном подпространстве $S(A, \lambda_k)$ линейного оператора A .

Любой собственный вектор с собственным значением λ_k принадлежит подпространству $S(A, \lambda_k)$, и, следовательно, найденный базис в этом подпространстве позволяет представить любой собственный вектор с собственным значением λ_k .

Пример 3.6. Найдем собственные векторы и собственные значения линейного оператора A , имеющего в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с описанной процедурой необходимо выполнить три действия. Первое действие можно опустить, так как оператор уже представлен своей матрицей в некотором базисе. Выполняем дальнейшие действия.

Находим собственные значения, решая характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

Находим столбцы координат собственных векторов, решая для каждого из трех собственных значений однородную систему алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda = \lambda_1 = -3$ эта система имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен 2:

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

Поэтому размерность пространства решений системы равна $3 - 2 = 1$.
Фундаментальная система решений содержит одно решение, например,

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Все множество собственных векторов линейного оператора с собственным значением $\lambda_1 = -3$ в координатной форме имеет вид

$$\alpha x^{(1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где α – произвольное ненулевое действительное число.

При $\lambda = \lambda_2 = 1$ система имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Ранг матрицы этой системы равен 2:

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Поэтому размерность пространства решений системы равна $3 - 2 = 1$. Фундаментальная система решений содержит одно решение. Выберем следующее:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Все множество собственных векторов с собственным значением $\lambda_2 = 1$ в координатной форме имеет вид

$$\beta x^{(2)} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где β – произвольное ненулевое действительное число.

Для $\lambda = \lambda_3 = 3$ аналогично предыдущим двум случаям находим столбец координат одного из собственных векторов, например,

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix},$$

который порождает собственное подпространство линейного оператора **A**, отвечающее собственному значению $\lambda_3 = 3$.

Пример 3.7. Найдём собственные значения линейного оператора **A**, действующего в n -мерном линейном пространстве, матрица **A** которого в некотором базисе является верхней треугольной порядка n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

причем все ее диагональные элементы a_{ii} попарно различны, т.е. $a_{ii} \neq a_{jj}$ при $i \neq j$. Составляем характеристическое уравнение матрицы **A**:

$$\det (A - \lambda E) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = 0$$

(определитель верхней треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов). Находим все действительные корни этого уравнения:

$\lambda_{kk} = a_{kk}$, $k = 1, \dots, n$. Как видим, линейный оператор **A** имеет n попарно различных собственных значений. В данном случае оператор имеет n различных собственных подпространств, причем размерность каждого из них равна единице, так как их размерность не может быть меньше. Если бы одно из подпространств имело бы размерность больше единицы, то их суммарная размерность превышала бы размерность самого линейного пространства. Рассмотрим то из собственных подпространств, которое отвечает собственному значению $\lambda_r = a_{rr}$ при $r = 1$. В этом случае собственным является вектор $x^{(1)}$ со столбцом координат $(10\dots 0)^T$. При $r = 2$ все координаты собственного вектора, начиная с третьей, будут равны нулю, так как они удовлетворяют системе

$$\begin{pmatrix} a_{33} - a_{22} & a_{34} & & a_{3n} \\ 0 & a_{44} - a_{22} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} - a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

получающейся выбрасыванием первых двух уравнений. Второе уравнение вытекает из всех предыдущих и может быть опущено, а первое уравнение определяет связь между первыми двумя координатами. Мы получаем, что собственному значению a_{22} отвечает вектор $x^{(2)}$ со столбцом координат $(-a_{12} a_{11} 0 \dots 0)^T$. И далее эти рассуждения можно продолжить и получить для собственного значения a_{33} вектор $x^{(3)}$ со столбцом координат $(x_{13} x_{23} x_{33} 0 \dots 0)^T$, у которого лишь первые три координаты отличны от нуля. Эти три координаты удовлетворяют однородной системе из двух уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_{13} + a_{12}x_{23} + a_{13}x_{33} = 0, \\ a_{22}x_{23} + a_{33}x_{33} = 0. \end{cases}$$

И также можно получить остальные собственные векторы.

Пример 3.8. Преобразование поворота в V_3 на заданный острый угол вокруг некоторой оси – это линейный оператор. Его собственными векторами являются векторы, коллинеарные оси поворота. Например, если поворот выполняется вокруг оси Oz , то матрица оператора в базисе i, j, k будет иметь

вид $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а его собственными векторами будут векторы со столбцами координат вида $\lambda (0 0 1)^T$, $\lambda \neq 0$.

§4. Собственные векторы и собственные числа симметрического оператора

Рассмотрим собственные векторы и собственные числа самосопряженного оператора, называемого также симметрическим, поскольку его матрица

в любом ортонормированном базисе, как это было доказано ранее, является симметрической.

Напомним, что комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ называются комплексно сопряженными. Число, комплексно сопряженное к числу z , обозначают $\bar{z}$. Рассмотрим произвольную матрицу $M = (m_{ij})$, элементами которой являются комплексные (в частности, действительные) числа m_{ij} . Матрицу $\bar{M} = (\bar{m}_{ij})$ того же типа, что и матрица M , элементами которой являются числа $\bar{m}_{ij}$, будем называть комплексно сопряженной к матрице M . Она состоит из комплексно сопряженных элементов матрицы M . Из свойств комплексных чисел вытекают следующие соотношения: $\overline{M+N} = \bar{M} + \bar{N}$, $\overline{MN} = \bar{M} \bar{N}$, $\overline{M^T} = (\bar{M})^T$.

Теорема 3.6. Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора действительны.

Это утверждение можно переформулировать следующим образом: характеристическое уравнение симметрической матрицы имеет только действительные корни. В этой форме и будем его доказывать.

Предположим, что некоторое число λ , вообще говоря комплексное, является корнем характеристического многочлена симметрической матрицы A , то есть $\det(A - \lambda E) = 0$. Тогда система линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda E)x = 0$ имеет некоторое ненулевое решение $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, состоящее из комплексно сопряженных чисел x_k , $k = 1, \dots, n$. Рассмотрим столбец $\bar{x}$, комплексно сопряженный к столбцу x . Умножим равенство $(A - \lambda E)x = 0$ слева на строку $\bar{x}^T$. Тогда $\bar{x}^T(A - \lambda E)x = 0$, или

$$\bar{x}^T A x = \lambda \bar{x}^T x. \quad (3.3)$$

Так как произведение комплексного числа на сопряженное к нему является действительным числом, равным квадрату модуля комплексного числа, а x – ненулевое решение, то

$$\bar{x}^T x = \bar{x}_1 x_1 + \dots + \bar{x}_n x_n = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0,$$

то есть матричное произведение $\bar{x}^T x$ представляет собой положительное число. Тогда можно определить из равенства (3.3)

$$\lambda = \frac{\bar{x}^T A x}{\bar{x}^T x},$$

причем λ будет действительным числом, если $y = \bar{x}^T A x$ будет действительным числом. В силу симметричности матрицы A

$$y = y^T = (\bar{x}^T A x)^T = x^T A^T \bar{x} = x^T A \bar{x}.$$

Поэтому с учетом свойств операции комплексного сопряжения матриц и благодаря тому, что элементами матрицы A являются действительные числа, получаем

$$\bar{y} = \overline{\bar{x}^T A x} = (\bar{\bar{x}})^T A \bar{x} = x^T A \bar{x} = y.$$

Комплексное число, сопряженное самому себе, – это действительное число. Следовательно, и u является действительным.

Следствие 3.1. Если матрица A является симметрической, то все корни ее характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ действительные.

Следствие 3.2. Самосопряженный оператор, действующий в n -мерном евклидовом пространстве, имеет n собственных значений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.

Следствие 3.3. Симметрическая матрица порядка n имеет n собственных значений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.

Теорема 3.8. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Рассмотрим самосопряженный оператор A и два его собственных вектора u_1 и u_2 , отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 . Тогда $Au_1 = \lambda_1 u_1$, $Au_2 = \lambda_2 u_2$, поэтому $(Au_1, u_2) = (\lambda_1 u_1, u_2) = \lambda_1 (u_1, u_2)$. Но так как A является самосопряженным оператором, то $(Au_1, u_2) = (u_1, Au_2)$. Значит, $(Au_1, u_2) = (u_1, Au_2) = (u_1, \lambda_2 u_2) = \lambda_2 (u_1, u_2)$. Таким образом, получаем $\lambda_1 (u_1, u_2) = \lambda_2 (u_1, u_2)$, или $(\lambda_1 - \lambda_2) (u_1, u_2) = 0$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, из этого равенства следует, что $(u_1, u_2) = 0$, что и означает ортогональность векторов u_1 и u_2 .

§5. Базис из собственных векторов самосопряженного оператора

Теорема 3.9. Если собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ самосопряженного оператора A , действующего в n -мерном евклидовом пространстве E , попарно различны, то в E существует ортонормированный базис, в котором матрица этого линейного оператора A имеет диагональный вид, причем диагональными элементами такой матрицы являются собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Поскольку собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ попарно различны, то выбрав для каждого λ_i соответствующий ему собственный вектор e_i , получим систему n ненулевых векторов, которые по предыдущей теореме попарно ортогональны. Поэтому e – ортогональная система векторов. Поскольку она состоит из n собственных векторов, отвечающих попарно различным собственным значениям оператора, то она линейно независима и является базисом. Этот базис является ортогональным, а чтобы превратить его в ортонормированный, необходимо каждый вектор e_i нормировать делением на его длину. Таким образом, в условиях теоремы существует базис из собственных векторов самосопряженного оператора A . Ранее было доказано, что матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов является диагональной, а диагональные элементы матрицы представляют собой собственные значения.

Хотя все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора действительны, среди них могут быть кратные, и тогда теорема, доказанная нами, неприменима. Однако и в этом случае матрица самосопряженного оператора приводится к диагональному виду.

Теорема 3.10. Для любого самосопряженного оператора A существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого линейного оператора. Матрица A самосопряженного оператора A в этом базисе имеет диагональный вид, на ее диагонали расположены собственные значения оператора A , повторяющиеся столько раз, какова их кратность.

Доказательство этой теоремы выходит за рамки изучаемого курса и поэтому не приводится.

Базис из собственных векторов симметрической матрицы A оператора A называется **собственным базисом самосопряженного оператора**.

Следствие. Любая симметрическая матрица M порядка n подобна некоторой диагональной, т.е. существует такая невырожденная матрица P порядка n , что $P^{-1}MP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Последовательность $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ из n чисел представляет собой перечень всех корней характеристического уравнения матрицы M с учетом их кратностей.

Рассмотрим в n -мерном евклидовом пространстве R^n стандартный ортонормированный базис, и пусть матрица M является матрицей в этом базисе некоторого линейного оператора M . Тогда этот оператор будет самосопряженным. По доказанной теореме для него существует ортонормированный базис, в котором его матрица M' имеет диагональный вид $M' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Матрица M' получается из исходной матрицы M при помощи матрицы перехода P из стандартного базиса в указанный ортонормированный базис: $M' = P^{-1}MP$.

ГЛАВА 4. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§1. Определение

Функцию $L(v)$, удовлетворяющую соотношению $L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$, где $u, v \in V$ – произвольные векторы; $\alpha, \beta \in R$ – произвольные действительные числа, называют **линейной формой на линейном пространстве V** . Линейная форма может быть записана в виде:

$$L(v) = (c, v),$$

где c – данный вектор.

Функция $b(u, v)$ двух векторных аргументов $u, v \in V$, линейная по каждому аргументу, называется **билинейной формой на линейном пространстве V** . Линейность функции $b(u, v)$ по каждому из аргументов означает, что для любых действительных α, β и любых векторов $u, v, w \in V$ выполняются равенства $b(\alpha u + \beta v, w) = \alpha b(u, w) + \beta b(v, w)$, $b(u, \alpha v + \beta w) = \alpha b(u, v) + \beta b(u, w)$.

Пример 4.1. Частным случаем билинейной формы является скалярное произведение. Действительно, аксиомы скалярного произведения означают, что скалярное произведение как функция от двух переменных линейно по первому и второму аргументам.

Выберем в n -мерном линейном пространстве V некоторый базис $e = (e_1, \dots, e_n)$. Для билинейной формы $b(u, v)$ обозначим $b_{ij} = b(e_i, e_j)$, $i, j = 1, \dots, n$. Тогда для любых векторов u и v со столбцами координат $u = (u_1, \dots, u_n)^T$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ в базисе e

$$b(u, v) = b\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j b(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} u_i v_j.$$

Используя квадратную матрицу $B = (b_{ij})_{n,n}$ порядка n , где $b_{ij} = b(e_i, e_j)$, можем записать полученное представление в матричной форме: $b(u, v) = u^T B v$. Матрицу B называют **матрицей билинейной формы $b(u, v)$ в базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$** .

Таким образом, билинейная форма однозначно определяется своей матрицей в произвольно выбранном базисе.

Функция вида $q(v) = b(v, v)$, где b – билинейная форма с симметрической матрицей, называется **квадратичной формой**. Используя представление билинейной формы в базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$, квадратичную форму можно представить в виде многочлена второй степени от n переменных с действительными коэффициентами

$$q(v) = b(v, v) = \sum_{i=1}^n b_{ii} v_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} v_i v_j, \quad b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Это представление квадратичной формы называется **координатной записью квадратичной формы** $q(v)$.

Пример 4.2. Выражение $5x^2 + 4xy + 8y^2$ задает некоторую квадратичную форму в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Пример 4.3. Выражение $9x^2 + 6y^2 + z^2 - 7xy + 3xz - 7yz$ задает квадратичную форму в пространстве $\mathbb{R}^3$.

§2. Матрица квадратичной формы

Квадратичная форма представляет интерес как способ задания некоторой функции векторного аргумента, определенной в n -мерном линейном пространстве V . Если в этом пространстве выбрать некоторый базис, то квадратичную форму можно трактовать как функцию, значение которой определено через координаты $v_1, v_2, \dots, v_n$ вектора v . Эту функцию часто отождествляют с квадратичной формой.

Так же как и билинейную форму, квадратичную форму можно записать в матричном виде: $v^T B v$, где $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ – столбец, составленный из переменных; $B = (b_{ij})_{n,n}$ – симметрическая матрица порядка n , называемая **матрицей квадратичной формы**. Ранг матрицы B квадратичной формы называют рангом квадратичной формы. Если матрица B имеет максимальный ранг, равный числу переменных n , то квадратичную форму называют невырожденной, а если ранг B меньше n , то ее называют вырожденной.

Пример 4.4. Квадратичная форма от трех переменных $x_1^2 + 4x_1x_3$ имеет

матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Так как $\text{Rg } A = 2 < 3$, то эта квадратичная форма является

вырожденной. В матричной записи квадратичная форма имеет вид

$$x_1^2 + 4x_1x_3 = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть дана квадратичная форма $u^T A u$, где $u = (u_1, \dots, u_n)^T$. В n -мерном линейном пространстве V с фиксированным базисом e она определяет

функцию $f(u) = u_e^T A u_e$, заданную через координаты вектора u_e вектора u в базисе e . Найдем представление этой же функции в некотором другом базисе a . Пусть U – матрица перехода от базиса e к базису a . Тогда координаты u_e вектора u в базисе e и координаты u_a вектора u в новом базисе a будут связаны соотношением

$$u_e = U u_a. \quad (4.1)$$

Функция $f(x)$ в новом базисе будет выражаться через новые координаты вектора u следующим образом: $u_e^T A u_e = (U u_a)^T A (U u_a) = u_a^T (U^T A U) u_a = u_a^T A' u_a$. Итак, функция f в новом базисе также записывается при помощи квадратичной формы, причем матрица A' этой квадратичной формы связана с матрицей исходной квадратичной формы соотношением $A' = U^T A U$.

Преобразование матрицы квадратичной формы вызывается заменой переменных (переходом от переменных u_e к переменным u_a). Замену переменных вида (4.1) с произвольной матрицей U называют линейной. Изменение базиса в линейном пространстве приводит к линейной замене переменных (4.1) с невырожденной матрицей U .

Пример 4.5. Квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

преобразуем к новым переменным y_1, y_2, y_3 , где

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Эта замена переменных в матричной форме записи имеет вид

$$x = Uy, \text{ где } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно вышеизложенному имеем

$$A' = U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и квадратичная форма принимает вид $f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$, т.е. все коэффициенты при попарных произведениях переменных обнуляются и остаются слагаемые с квадратами переменных.

§3. Канонический вид

Канонический вид квадратичной формы $Q(v)$ – это координатная запись формы, не содержащая произведений $v_i v_j$ ($i \neq j$), т.е. содержащая лишь квадраты координат. Переменные $v_1, \dots, v_n$, в которых квадратичная форма имеет канонический вид, называют каноническими переменными.

Один из методов преобразования (или, как говорят, приведения) квадратичной формы к каноническому виду путем замены переменных состоит в последовательном выделении полных квадратов. Проиллюстрируем этот метод на примере.

Пример 4.6. Рассмотрим квадратичную форму $x_1^2 - 4x_1x_2$ от двух переменных. Для преобразования ее к каноническому виду выделим полный квадрат по переменной x_1 . Для этого соберем слагаемые, содержащие x_1 , и дополним до полного квадрата: $x_1^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_2^2$. Введя новые переменные $z_1 = x_1 - 2x_2$, $z_2 = 2x_2$, получим квадратичную форму канонического вида: $z_1^2 - z_2^2$.

Пример 4.7. Рассмотрим уравнение кривой второго порядка

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$$

и приведем его к каноническому виду, для чего дополним до полных квадратов члены, содержащие x , y , z , т.е. перепишем уравнение в следующем виде:

$$(x^2 - x + 0,25) - 0,25 + (y^2 + 2y + 1) - 1 + z^2 + 1 = (x - 0,5)^2 + (y+1)^2 + z^2 + 1.$$

Замена переменных $x' = x - 0,5$, $y' = y+1$, $z' = z$ приводит к каноническому виду уравнения кривой

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 0,25,$$

левая часть которого представляет из себя квадратичную форму в каноническом виде.

§4. Приведение к каноническому виду

Как применять метод выделения полных квадратов в общем случае? Рассмотрим квадратичную форму от n переменных общего вида:

$$f(v) = \sum_{i=1}^n b_{ii}v_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}v_i v_j, \quad b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Если $b_{11} \neq 0$, соберем все слагаемые формы, содержащие переменное x_1 , и дополним их слагаемыми так, чтобы получился полный квадрат. В результате получим:

$$\begin{aligned} f(v) &= b_{11}v_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n b_{1j}v_1 v_j + \sum_{i=2}^n b_{ii}v_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} b_{ij}v_i v_j = \\ &= b_{11}(x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 - b_{11} \sum_{j=2}^n a_{1j}^2 v_j^2 - 2b_{11} \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{1i}a_{1j}v_i v_j + \\ &+ \sum_{i=2}^n b_{ii}v_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} b_{ij}v_i v_j = b_{11}' \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} v_j \right)^2 + f_1(v_2, \dots, v_n), \end{aligned}$$

где $b'_1 = b_{11}$, $a_{ij} = b_{ij} / b_{11}$, $j = 1, \dots, n$, а $f_1(v_2, \dots, v_n)$ – квадратичная форма, не содержащая переменного v_1 .

С квадратичной формой f_1 можно поступить аналогичным образом, выделяя полный квадрат по переменной v_2 . Продолжая процесс, мы преобразуем квадратичную форму $f(v)$ к виду

$$f(v) = b'_1 \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} v_j \right)^2 + b'_2 \left(\sum_{j=1}^n a_{2j} v_j \right)^2 + \dots + b'_r \left(\sum_{j=1}^n a_{rj} v_j \right)^2,$$

где коэффициенты b'_j являются ненулевыми, а $a_j = 1$, $j = 1, \dots, r$. Выполним линейную замену переменных

$$v'_1 = a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n, \quad v'_2 = a_{22}v_1 + \dots + a_{2n}v_n, \quad \dots, \quad v'_r = a_{r1}v_1 + \dots + a_{rn}v_n, \quad v'_{r+1} = v_{r+1}, \quad \dots, \quad v'_n = v_n,$$

определяемую верхней треугольной матрицей A . Отметим, что диагональные элементы матрицы A равны единице, поэтому эта матрица невырождена. В результате замены переменных мы приходим к квадратичной форме

$$f(v') = b'_1 (v'_1)^2 + \dots + b'_r (v'_r)^2,$$

имеющей канонический вид.

Изложенная схема не применима, если на каком-либо ее этапе в квадратичной форме нет соответствующего переменного во второй степени. Например, может случиться, что $b_{11} = 0$. Тогда мы вместо переменного v_1 можем остановить свой выбор на другом, квадрат которого присутствует в квадратичной форме. Но может быть так, что в квадратичной форме нет ни одного квадрата (например, $f(v_1, v_2) = v_1 v_2$). Тогда перед выделением квадрата следует выполнить промежуточную замену переменных. Для этого выбираем любое слагаемое квадратичной формы. Пусть для определенности $b_{12} \neq 0$, так что присутствует слагаемое $2b_{12}v_1v_2$. После замены переменных $v_1 = v'_1 + v'_2$, $v_2 = v'_1 - v'_2$, $v_3 = v'_3$, $\dots$, $v_n = v'_n$ получим квадратичную форму, у которой присутствует квадрат переменного v'_1 , так как $v_1 v_2 = (v'_1 + v'_2)(v'_1 - v'_2) = (v'_1)^2 - (v'_2)^2$. Отметим, что канонический вид, к которому приводится квадратичная форма, определяется неоднозначно.

Пример 4.8. Квадратичная форма $f(v) = (v_1)^2 - (v_2)^2$ в каноническом виде заменой $w_1 = v_1/3$, $w_2 = v_2/3$ приводится к квадратической форме $9w_1^2 - 9w_2^2$ также канонического вида.

Другим методом приведения квадратической формы к каноническому виду является метод, основанный на ортогональном преобразовании матрицы. Мы установили, что матрица A квадратичной формы при переходе к новому базису изменяется по формуле $A' = U^T A U$, где U – матрица перехода. Если рассматривать евклидово пространство, а старый и новый базисы выбраны ортонормированными, то матрица перехода U является ортогональной и мы имеем дело с ортогональным преобразованием квадратичной формы.

Теорема 4.1. При ортогональном преобразовании квадратичной формы характеристическое уравнение ее матрицы не изменяется.

Пусть A – матрица заданной квадратичной формы. При ортогональном преобразовании эта матрица изменяется по формуле $A' = U^T A U$, U является

ортогональной матрицей. Согласно свойству ортогональных матриц U имеет обратную, причем $U^{-1} = U^T$. Поэтому $A' = U^T A U = U^{-1} A U$, и мы видим, что матрицы A' и A подобны, а у подобных матриц характеристические уравнения совпадают.

Теорема 4.2. Любую квадратичную форму ортогональным преобразованием можно привести к каноническому виду.

Матрица A данной квадратичной формы является симметрической. Но любая симметрическая матрица подобна диагональной, т.е. существует такая невырожденная матрица P , что матрица $A' = P^{-1}AP$ является диагональной. Убедимся, что в качестве P можно выбрать ортогональную матрицу. Действительно, рассмотрим произвольное n -мерное евклидово пространство E (n - количество переменных в квадратичной форме) и некоторый ортонормированный базис a в этом пространстве. Матрица A является матрицей некоторого самосопряженного оператора A в базисе a . Известно, что существует такой ортонормированный базис e , что матрица A' оператора A в этом базисе является диагональной. Согласно формуле преобразования матрицы линейного оператора, имеем $A' = P^{-1}AP$, где P – матрица перехода из базиса a в базис e . Так как оба базиса ортонормированные, матрица P является ортогональной. А для ортогональной матрицы $P^{-1} = P^T$ и тогда $A' = P^TAP$ и диагональная матрица A' является матрицей квадратичной формы, полученной из исходной при помощи ортогонального преобразования. Диагональный вид матрицы A' равнозначен каноническому виду квадратичной формы.

В ходе доказательства предыдущих теорем мы получили, что диагональными элементами матрицы A' квадратичной формы канонического вида, получающейся в результате ортогонального преобразования, являются собственные значения матрицы A квадратичной формы. Из этого следует, что мы можем записать матрицу A' канонического вида, не находя соответствующего ортогонального преобразования.

Кроме того, находя ортогональное преобразование, приводящее квадратичную ортогональную форму к каноническому виду, мы фактически ищем базис из собственных векторов соответствующего самосопряженного оператора. Действительно, если квадратичная форма и самосопряженный оператор имели в исходном ортонормированном базисе одинаковую матрицу, то и в новом ортонормированном базисе их матрицы будут совпадать.

Мы предполагаем, что квадратичная форма представляет собой запись функции, заданной в евклидовом пространстве, через координаты вектора в некотором ортонормированном базисе. На самом деле такое представление носит чисто вспомогательный характер, помогающий смотреть на процесс с геометрической точки зрения, но она никак не используется в самом алгоритме построения ортогонального преобразования. Достаточно лишь записать матрицу квадратичной формы и применить к этой матрице процедуру приведения к диагональному виду.

Проиллюстрируем на примерах процедуру практического вычисления ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Пример 4.9. Квадратичную форму $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2$ от двух переменных мы приводили к каноническому виду методом выделения полных квадратов. Теперь попробуем привести ее к каноническому виду ортогональным

преобразованием. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристическое уравнение этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 4 = 0.$$

Вычисляем корни характеристического уравнения, они же собственные значения матрицы A:

$$\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{17}) / 2.$$

Теперь можно записать канонический вид квадратичной формы:

$$f(y_1, y_2) = \frac{1+\sqrt{17}}{2} y_1^2 + \frac{1-\sqrt{17}}{2} y_2^2.$$

Пример 4.10. Найдем канонический вид квадратичной формы

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2,$$

к которому она приводится ортогональным преобразованием, и укажем одно из таких ортогональных преобразований. Квадратичная форма имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

с характеристическим уравнением матрицы

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = 0.$$

Собственными значениями матрицы квадратичной формы являются $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$, т.е. квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$f(y_1, y_2) = y_1^2 + 9y_2^2.$$

Для построения ортогонального преобразования найдем собственные векторы матрицы рассматриваемой квадратичной формы. Из однородной системы алгебраических уравнений $(A - \lambda E)x = 0$ при $\lambda_1 = 1$ находим собственный вектор $e_1 = (1 - 1)^T$. Тогда вектор $e_2 = (1, 1)^T$ будет собственным вектором с соответствующим собственным значением $\lambda_2 = 9$. Пронормировав эти векторы, составляем из столбцов их координат матрицу ортогонального

преобразования $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, которой соответствует линейная замена переменных $x = Py$.

Единообразное поведение самосопряженных операторов и квадратичных форм объясняется следующей теоремой.

Теорема 4.3. Пусть $A: E \rightarrow E$ – самосопряженный оператор, действующий в евклидовом пространстве E . Функция $f(x) = (Ax, x)$, определенная на евклидовом пространстве, является квадратичной формой. Наоборот, для любой квадратичной формы $f(x)$ на евклидовом пространстве E существует такой самосопряженный оператор A , что $f(x) = (Ax, x)$. Этот оператор определен однозначно.

Чтобы доказать первое утверждение теоремы, вспомним, как записывается скалярное произведение в ортонормированном базисе. Используя такую запись и учитывая самосопряженность оператора, получаем $(Ax, x) = (x, Ax) = x^T A x$, где x – столбец координат вектора x ; A – матрица линейного оператора A . Мы пришли к координатной записи $x^T A x$ некоторой квадратичной формы.

Пусть $f(x)$ – квадратичная форма, которая в данном ортонормированном базисе e имеет вид $f(x) = x^T A x$. Взяв самосопряженный оператор A , который в базисе e имеет матрицу A , получаем $f(x) = x^T A x = x^T (Ax) = (x, Ax) = (Ax, x)$.

Наконец, докажем, что если для двух самосопряженных операторов A и B выполняется равенство $(Ax, x) = (Bx, x)$ для любого вектора $x \in E$, то $A = B$. Записав указанное равенство в координатах (A, B – матрицы операторов, x – столбец координат вектора x), получаем $x^T A x = x^T B x$, т.е. равенство двух многочленов второй степени от n переменных. Такое равенство возможно лишь в том случае, когда все коэффициенты этих многочленов при одинаковых слагаемых равны, но это эквивалентно равенству матриц $A = B$ и, следовательно, равенству самосопряженных операторов.

§5. Положительно и неотрицательно определенные квадратичные формы

Квадратичные формы подразделяют на различные типы в зависимости от множества их значений.

Положительно определенная квадратичная форма $Q(v)$ – это форма $Q(v) \geq 0$ для всех v ; $Q(v) = 0$ только в случае $v = 0$.

Неотрицательно определенная квадратичная форма $Q(v)$ – это форма $Q(v) \geq 0$ для любых v .

Аналогично определяются отрицательно определенная и неположительно определенная форма, при этом знаки неравенств будут меняться на противоположные. Остальные квадратичные формы, не относящиеся к определенным, называют неопределенными или знакопеременными квадратичными формами.

Пример 4.11. Рассмотрим четыре квадратичные формы от трех переменных:

$$f_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

$$f_2(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2,$$

$$f_3(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,$$

$$f_4(y_1, y_2, y_3) = y_1 y_2.$$

Квадратичная форма $f_1(y_1, y_2, y_3)$ положительно определена, так как представляет собой сумму трех квадратов и потому принимает только положительные значения, если переменные одновременно не обращаются

в нуль. Квадратичная форма $f_2(y_1, y_2, y_3)$ неотрицательно определена: будучи суммой двух квадратов она не принимает отрицательных значений, но при $x_1 = x_2 = 0$ и $x_3 \neq 0$ она принимает нулевые значения. Квадратичные формы f_3 и f_4 знакопеременные. Первая из них положительна при $x = (1, 0, 0)^T$ и отрицательна при $x = (0, 1, 0)^T$. Вторая положительна при $x = (1, 1, 0)^T$ и отрицательна при $x = (1, -1, 0)^T$. Квадратичные формы f_2 и f_4 являются вырожденными, так как ранг каждой из них равен двум.

Как следует из определения, тип квадратичной формы зависит только от множества значений, которые она принимает, но не зависит от переменных, в которых она записана. Поэтому, представив квадратичную форму в каноническом виде, сразу получаем следующие критерии для определения типа квадратичной формы в зависимости от множества собственных значений ее матрицы.

Тип квадратичной формы	Множество собственных значений
Положительно определенная (для всех $x \neq 0$ $f(x) > 0$)	Все собственные значения положительны ($\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$)
Отрицательно определенная (для всех $x \neq 0$ $f(x) < 0$)	Все собственные значения отрицательны ($\lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$)
Знакопеременная (существуют такие столбцы x и y , что $f(x) > 0$ и $f(y) < 0$)	Есть собственные значения разных знаков (существуют $\lambda_i > 0$ и $\lambda_j < 0$)
Вырожденная (существует $x \neq 0$, что $f(x) = 0$)	Есть нулевое собственное значение (существует $\lambda_i = 0$)

§6. Критерий Сильвестра 14

Хотя приведенная в предыдущем параграфе таблица дает удобную характеристику типам квадратичных форм, ее использование для определения типа конкретной квадратичной формы связано с вычислением собственных значений матрицы.

Во многих случаях тип квадратичной формы можно определить, не вычисляя собственных значений ее матрицы. Метод состоит в вычислении и проверке знаков некоторых миноров матрицы квадратичной формы. Введем следующие обозначения.

Пусть матрица квадратичной формы $f(y) = y^T A y$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_i = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$. Рассмотрим угловые миноры этой матрицы, их также называют главными минорами (см. [3]):

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Каждый угловой минор k -го порядка расположен на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы квадратичной формы. Угловой минор максимального, n -го, порядка представляет собой определитель матрицы.

Теорема 4.4. О необходимом и достаточном условии положительной определенности квадратичной формы (**критерий Сильвестра**).

Для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$.

Необходимость. Если квадратичная форма положительно определена, то в ее каноническом виде все коэффициенты должны быть положительными. Значит и определитель матрицы квадратичной формы канонического вида положителен. Невырожденное преобразование квадратичной формы не меняет знака определителя, так как, согласно формуле преобразования, $A' = U^T A U$, а следовательно, $\det(A') = \det(U^T A U) = (\det U)^2 \det A$. Поэтому определитель матрицы исходной канонической формы тоже положителен, т.е. $\Delta_n > 0$.

Если квадратичная форма $f(y_1, \dots, y_n)$ от n переменных положительно определена, то квадратичная форма $f_k(y_1, \dots, y_k) = f_k(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$ от k переменных также положительно определена и, следовательно, определитель ее матрицы положителен. Но этот определитель совпадает с Δ_k , т.е. $\Delta_k > 0$ при $k = 1, \dots, n$.

Достаточность. Используем метод математической индукции по количеству n переменных квадратичной формы. При $n = 1$ утверждение верно, поскольку из условия $\Delta_1 = a_{11} > 0$ следует, что $f(y_1) = a_{11} y_1^2 > 0$. Пусть утверждение верно для всех квадратичных форм от k переменных, $k \leq n - 1$. Рассмотрим произвольную квадратичную форму $f(y)$ с матрицей $A = (a_{ij})$ в базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$, у которой все угловые миноры положительны. Квадратичная форма $f_{n-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) = f(y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ от $n - 1$ переменных определена на линейном подпространстве $H_{n-1} = L(e_1, \dots, e_{n-1})$ и имеет матрицу, совпадающую с матрицей минора Δ_{n-1} . Так как все угловые миноры для Δ_{n-1} , они же угловые миноры матрицы A , положительны, согласно предположению математической индукции квадратичная форма f_{n-1} является положительно определенной. Заменой базиса $e_1, \dots, e_{n-1}$ подпространства H_{n-1} новым базисом $b_1, \dots, b_{n-1}$ мы можем привести квадратичную форму f_{n-1} к диагональному виду:

$$f_{n-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_{n-1} y_{n-1}^2, \lambda_i > 0, i = 1, \dots, n-1.$$

В базисе $(b_1, \dots, b_{n-1}, e_n)$ квадратичная форма $f(y)$ имеет вид:

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} b_{in} y_i y_n + b_{nn} y_n^2,$$

так как при $y_n = 0$ она совпадает с квадратичной формой f_{n-1} . Преобразуем последнее выражение для $f(y)$, выделяя квадраты по переменным $y_1, \dots, y_{n-1}$:

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (y_i + \mu_i y_n)^2 + \lambda_n y_n^2,$$

где $\mu_i = b_n / \lambda_i$, $i = 1, \dots, n-1$, $\lambda_n = b_{nn} - \lambda_1 \mu_1^2 - \dots - \lambda_{n-1} \mu_{n-1}^2$. Выполнив линейную замену переменных $y'_i = y_i + \mu_i y_n$, $i = 1, \dots, n-1$, $y'_n = y_n$ с невырожденной матрицей, приходим к квадратичной форме канонического вида

$$f(y) = \lambda_1 (y'_n)^2 + \dots + \lambda_n (y'_n)^2,$$

в которой коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ положительны. У определителя матрицы квадратичной формы знак не зависит от выбора базиса. Поэтому в полученном представлении имеем $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \lambda_n > 0$, так как $\lambda_n > 0$. Отсюда следует, что $\lambda_n > 0$, так как все остальные коэффициенты λ_i положительны. Таким образом, в полученном представлении все коэффициенты положительны и квадратичная форма $f(y)$ положительно определена.

Следствие 4.1. Для того чтобы квадратичная форма n переменных была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства: $-\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $(-1)^n \Delta_n > 0$ (знаки угловых миноров чередуются начиная с минуса).

Если квадратичная форма $f(y)$ отрицательно определена, то квадратичная форма $-f(y)$ положительно определена, и наоборот. Матрицей квадратичной формы $-f(y)$ является матрица $-A$, противоположная матрице квадратичной формы $f(y)$. Согласно критерию Сильвестра, для положительной определенности квадратичной формы $-f(y)$ необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры Δ'_r , $r = 1, \dots, n$, матрицы $-A$ были положительны. Но при умножении матрицы A на число -1 все ее элементы умножаются на это число и поэтому $\Delta'_r = (-1)^r \Delta_r$, где Δ_r – угловой минор порядка r матрицы A . Таким образом, квадратичная форма $-f(y)$ положительно определена тогда и только тогда, когда выполнены неравенства $(-1)^r \Delta_r > 0$, $r = 1, \dots, n$, и это условие равносильно тому, что квадратичная форма $f(y)$ отрицательно определена.

Следствие 4.2. Невырожденная квадратичная форма знакопеременна тогда и только тогда, когда для матрицы квадратичной формы выполнено хотя бы одно из условий:

- один из угловых миноров равен нулю;
- один из угловых миноров четного порядка отрицателен;
- два угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки.

Невырожденная квадратичная форма может быть либо положительно определенной, либо отрицательно определенной, либо знакопеременной – в зависимости от знаков коэффициентов в ее каноническом виде. Если имеется нулевой угловой минор или один из угловых миноров четного порядка отрицателен, то эта квадратичная форма не является ни положительно, ни отрицательно определенной. То же можно утверждать и в случае, когда есть два угловых минора нечетного порядка с разными знаками. Значит, в этих случаях квадратичная форма знакопеременная.

Критерий Сильвестра и его следствия показывают, что тип квадратичной формы полностью определяется свойствами ее матрицы. Поэтому введенные термины можно перенести на симметрические матрицы. В частности, симметрическую матрицу A называют положительно (отрицательно)

определенной и пишут $A > 0$ ($A < 0$), если положительно (отрицательно) определена соответствующая квадратичная форма. Симметрическая матрица положительно определена, если все ее угловые миноры положительны.

Следствие 4.3. Если симметрическая матрица положительно определена, то все ее диагональные элементы положительны.

Если $A = (a_{ij})$ – симметрическая положительно определенная матрица порядка n , то ее первый угловой минор положителен, т.е. $a_{11} = \Delta_1 > 0$. Воспользовавшись тем, что утверждение следствия верно для диагонального элемента a_{ii} , докажем, что и $a_{ii} > 0$ при $i > 1$. В квадратичной форме $x^T A x$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Сделаем замену переменных $x_1 = y_i$, $x_i = y_i$, $x_j = y_j$ при $j \neq 1, i$. В новых переменных матрица $A' = (a'_{ij})$ квадратичной формы такова, что $a_{ii} = a_{11} > 0$.

Пример 4. 12. Квадратичная форма $x^T A x$ от трех переменных с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

положительно определена, так как

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1 > 0.$$

Пример 4. 13. Квадратичная форма $x^T A x$ от трех переменных с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

является знакопеременной, так как она невырождена ($\Delta_3 \neq 0$) и $\Delta_1 = 1 > 0$, а $\Delta_2 = -8 < 0$.

Пример 4. 14. Квадратичная форма $2x_1x_2$ от двух переменных является знакопеременной, так как она невырождена ($\Delta_2 = -1 \neq 0$), а $\Delta_1 = 0$.

Пример 4. 15. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1x_3 + 2x_2x_4 + x_4^2$ имеет угловые миноры $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 4$ и, следовательно, является знакопеременной. В этом можно убедиться, используя несложное преобразование квадратичной формы: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3)^2 - x_2^2 - (x_1 - x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2$.

§7. Закон инерции 143

Квадратичная форма может быть приведена к различным каноническим видам. Например, для квадратичной формы $f(x_1, x_2) = x_1 - 4x_1x_2$ найдены уже три канонических вида. Но, несмотря на многообразие канонических видов для данной квадратичной формы, имеются такие характеристики их коэффициентов, которые во всех этих канонических видах остаются неизменными. Например, если квадратичная форма преобразовалась к виду $f(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_m y_m^2$, в котором все коэффициенты λ_i положительны, то соответствующая этой квадратичной форме функция в линейном пространстве принимает только неотрицательные значения. Значит, никакой другой канонический вид не может

иметь отрицательных коэффициентов, так как наличие отрицательных коэффициентов означает, что функция имеет и отрицательные значения. Другой важной характеристикой является ранг матрицы квадратичной формы.

Теорема 4.5. Ранг квадратичной формы не меняется при невырожденных линейных заменах переменных и равен числу отличных от нуля коэффициентов в любом ее каноническом виде. Другими словами, ранг квадратичной формы равен количеству ненулевых собственных значений матрицы квадратичной формы (с учетом их кратности).

При замене базиса линейного пространства матрица A квадратичной формы преобразуется по формуле $A' = U^T A U$, в которой U – матрица перехода. Матрица U , как матрица перехода, является невырожденной, поэтому ранг A' совпадает с рангом A , так как при умножении на невырожденную матрицу ранг не меняется. Пусть квадратичная форма имеет два канонических вида $f_1(y_1, \dots, y_m) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_m y_m^2$ и $f_2(z_1, \dots, z_k) = \mu_1 z_1^2 + \dots + \mu_k z_k^2$, в которых все коэффициенты λ_i и μ_j ненулевые. Оба канонических вида – это квадратичные формы, представляющие собой одну и ту же функцию на линейном пространстве, но записанную в разных базисах. Значит, одна из квадратичных форм получается из другой в результате замены базиса и ранги их матриц совпадают. Остается заметить, что ранг квадратичной формы канонического вида равен количеству ненулевых коэффициентов этой формы, т.е. в нашем случае $m = k$. Квадратичную форму можно привести к каноническому виду ортогональным преобразованием. При этом коэффициенты квадратичной формы канонического вида (они же диагональные элементы ее матрицы) будут собственными значениями матрицы исходной квадратичной формы. Что и требовалось доказать.

В различных канонических видах данной квадратичной формы остается неизменным не только количество ненулевых коэффициентов, но и количество положительных и соответственно отрицательных коэффициентов. Объединяя это с доказанной теоремой, получаем следующее утверждение.

Теорема 4.6. Для любых двух канонических видов

$$f_1(y_1, \dots, y_m) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_m y_m^2, \lambda_i \neq 0, i = 1, \dots, m,$$

$$f_2(z_1, \dots, z_k) = \mu_1 z_1^2 + \dots + \mu_k z_k^2, \mu_j \neq 0, j = 1, \dots, k$$

одной и той же квадратичной формы $m = k$ и ранг квадратичной формы равен этому числу; количество положительных коэффициентов λ_i совпадает с количеством положительных коэффициентов μ_j ; количество отрицательных коэффициентов λ_i совпадает с количеством отрицательных коэффициентов μ_j .

Согласно теореме 4.5, количество ненулевых коэффициентов в обеих квадратичных формах одинаково, т.е. $m = k$. Пусть в этих канонических видах положительные коэффициенты предшествуют отрицательным, так что мы можем переписать их следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(y) &= \alpha_1 y_1^2 + \dots + \alpha_p y_p^2 - \alpha_{p+1} y_{p+1}^2 - \dots - \alpha_k y_k^2, \\ f_2(z) &= \beta_1 z_1^2 + \dots + \beta_q z_q^2 - \beta_{q+1} z_{q+1}^2 - \dots - \beta_k z_k^2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\alpha_i > 0, i = 1, \dots, k, \beta_j > 0, j = 1, \dots, k$. Этого всегда можно добиться изменением порядка переменных. Докажем, что $p = q$. Пусть это не так, и для определенности будем считать, что $p > q$.

Обозначим через $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ базисы, в которых записаны канонические виды $f_1(y)$ и $f_2(z)$ квадратичной формы. Покажем, что существует ненулевой вектор $\mathbf{x}$ с координатами $y_1, \dots, y_n$ в базисе $\mathbf{e}$ и с координатами $z_1, \dots, z_n$ в базисе $\mathbf{b}$, для которого одновременно выполняются условия $y_i = 0$, $i = p+1, \dots, n$, $z_j = 0$, $j = 1, \dots, q$. Действительно, координаты z_j линейным образом выражаются через координаты y_i : $z_j = u_{j1}y_1 + \dots + u_{jn}y_n$, $j = 1, \dots, n$, причем матрица $U = (u_{ij})$ – это матрица перехода из базиса $\mathbf{b}$ в базис $\mathbf{e}$. Поэтому условия, поставленные для вектора $\mathbf{x}$, составляют однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y_{p+1} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ y_n = 0, \\ u_{11}y_1 + \dots + u_{1n}y_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ u_{q1}y_1 + \dots + u_{qn}y_n = 0 \end{cases}$$

относительно координат вектора y , вектора x . Так как уравнений меньше числа неизвестных ($n - p + q < n$), эта система имеет ненулевое решение. Следовательно, существует вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, удовлетворяющий поставленным условиям. Но для этого вектора, согласно представлениям квадратичной формы (4.2), имеем:

$$f(\mathbf{x}) = f_1(y) = \alpha_1 y_1^2 + \dots + \alpha_p y_p^2 > 0,$$

$$f(\mathbf{x}) = f_2(z) = -\beta_{q+1} z_{q+1}^2 - \dots - \beta_k z_k^2 \leq 0.$$

Первое неравенство является строгим, так как все координаты y_i вектора $\mathbf{x}$, начиная с номера $p+1$, являются ненулевыми, а ненулевой вектор должен иметь хотя бы одну ненулевую координату. Два взаимоисключающих равенства показывают, что предположение $p \neq q$ не верно. Значит, $p = q$, т.е. количество положительных коэффициентов в двух канонических видах одинаково. Тогда и количество отрицательных коэффициентов в них совпадает, так как совпадает количество ненулевых коэффициентов.

Доказанная теорема о сохранении числа положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в каноническом виде, не зависимо от способа приведения квадратичной формы к сумме квадратов, называется **законом инерции**.

§1. Итерационный метод для вычисления максимального (минимального) собственного значения матрицы

Метод итерации – численный метод последовательного приближения к решению. Рассмотрим итерационный метод для вычисления максимального (минимального) собственного значения $\lambda_{\max}$ матрицы A , имеющей только действительные собственные значения. Если наибольшее по модулю собственное значение $\lambda_{\max}$ – простое, то, начиная с произвольного начального вектора x_0 , например $(1, 0, \dots, 0)$, вычисляют последовательно произведения $x_{k+1} = \alpha_k A x_k$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), где α_k – подходящий множитель, выбираемый, например, так, чтобы наибольшая по модулю координата вектора x_{k+1} равнялась 1. При возрастании k векторы x_k будут приближаться к собственному вектору, принадлежащему собственному значению $\lambda_{\max}$. Последнее можно вычислить по формуле

$$\lambda_{\max} = \frac{(x, Ax)}{(x, x)} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k}{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Этот метод сходится тем быстрее, чем значительнее отличается $|\lambda_{\max}|$ от модулей остальных собственных значений матрицы A и чем ближе направление начального вектора x_0 к направлению искомого собственного вектора. Если $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$ не удовлетворяет этому условию, то пробуют вектор $(0, 1, 0, \dots, 0)$ и т.д. Можно ускорить сходимость путем применения в формуле матрицы A^2 или A^3 вместо матрицы A . Последующие собственные значения и собственные векторы находят после приведения матрицы A .

Если наибольшее по модулю собственное значение $\lambda_{\max}$ имеет кратность больше единицы, то последовательность векторов, определенных формулой, сходится к одному из собственных векторов, принадлежащих $\lambda_{\max}$. Выбирая различные начальные векторы x_0 , можно построить все линейно независимые собственные векторы инвариантного пространства, принадлежащего собственному значению $\lambda_{\max}$.

§2. Гессиан

Пусть имеются n функций от n переменных $x_1, \dots, x_n$: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Функциональным определителем от этих функций по переменным x_s называется определитель n -го порядка, элементы a_{ik} которого определяются по формулам

$$a_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}, \text{ то есть являются частными производными функций } \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n.$$

Пример П.1. В случае двумерного пространства функциональный определитель будет определителем второго порядка

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Если мы имеем переход на плоскости от координат x, y к некоторым другим координатам u, v по формулам $x = \varphi_1(u, v)$, $y = \varphi_2(u, v)$, то $|\Delta|$ дает коэффициент изменения площади при данном точечном преобразовании.

Совершенно так же можно рассматривать одну функцию от одной переменной $u = f(x)$ как точечное преобразование на оси OX , при котором точка с абсциссой x переходит в новое положение с абсциссой u . При этом, очевидно, абсолютное значение производной $|f'(x)|$ характеризует изменения линейного размера в данном месте. Выясненная аналогия между функциональным определителем и производной имеет своим следствием и некоторую аналогию между их формальными свойствами. Так, функциональный определитель от сложной функции определяется как произведение функциональных определителей составляющих ее функций, аналогично правилу дифференцирования сложной функции одной независимой переменной. Произведение функциональных определителей прямого и обратного преобразований равно единице. Это свойство аналогично свойству производной обратной функции для случая одного независимого переменного. Тожественное равенство нулю функционального определителя является необходимым и достаточным условием зависимости между функциями $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Тожественное преобразование $\varphi_1 = x_1, \varphi_2 = x_2, \dots, \varphi_n = x_n$ имеет функциональный единичный определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Нетрудно проверить, что для множества функциональных определителей выполняются все аксиомы линейного пространства.

Функциональный определитель от частных производных $\varphi_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2},$

$\dots, \varphi_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}$, вычисленный в точке p , вида

$$H(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

где $a_{ij} = \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j}$ и $f(p)$ – функция, заданная в n -мерном действительном

пространстве R^n с координатами $x_1, \dots, x_n$, введен в 1844 году О.Гессе для решения задач о поведении функции нескольких переменных и назван его именем. Итак, **Гесссиан** – определитель n -го порядка, элементами которого являются вторые частные производные функции n переменных. Из представления Гесссиана видно, что он является квадратичной формой, заданной на касательном пространстве и не зависящей от выбора системы координат.

§3. Локальный экстремум функции нескольких переменных

Приведем пример применения квадратичной формы.

Пусть функция $z = f(x_1, \dots, x_n)$ определена в области $D \in R^n$ и $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ – точка этой области. Говорят, что $z = f(M)$ имеет в точке M_0 (локальный) максимум (минимум), если существует δ -окрестность точки M_0 такая, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство $f(M_0) > f(M)$ ($f(M_0) < f(M)$). Для обозначения минимума и максимума функции нескольких переменных, как и для функции одной переменной, употребляется общий термин – “экстремум”. Локальный экстремум является внутренним экстремумом или граничным экстремумом, если точка M_0 является соответственно внутренней или граничной точкой области определения D функции $z = f(x_1, \dots, x_n)$.

Теорема П.1. (необходимое условие существования экстремума).

Предположим, что в точке M_0 функция имеет экстремум. Тогда, если в этой точке существуют конечные частные производные, то все они в этой точке равны нулю. Равенство нулю частных производных является необходимым условием существования экстремума.

Доказательство. Действительно, пусть $x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$, тогда $z = f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – функция одной переменной, и так как в точке M_0 существует экстремум, то $f'_{x_1} = 0$. Таким же образом можно доказать, что все остальные частные производные равны нулю, т.е. $f'_{x_1} = 0, \dots, f'_{x_n} = 0$.

Как и в случае функции одной переменной, точки, в которых все частные производные равны нулю, называются критическими, стационарными или точками, “подозрительными” на экстремум. В критических точках не обязательно будет экстремум, т.е. равенство нулю частных производных – условие необходимое, но не достаточное.

Например, рассмотрим функцию $z = xy$ ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Частные производные $z'_x = y$ и $z'_y = x$. Критические точки найдем из условия $z'_x = y = 0$ и $z'_y = x = 0$, т.е. $x = 0, y = 0$. Итак, точка $(0, 0)$ – критическая, но она не является точкой экстремума, так как в ее окрестности функция $z = xy$ может принимать и положительные и отрицательные значения.

Теорема П.2 (достаточные условия существования экстремума).

Если функция $z = f(x_1, \dots, x_n)$ имеет в некоторой окрестности точки M_0 непрерывные вторые частные производные и если в этой точке выполняются необходимые условия существования экстремума, то в случае, когда

вычисленный в точке M_0 второй дифференциал $d^2f = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \Big|_{M_0} \Delta x_i \Delta x_k$ есть

отрицательно определенная квадратичная форма, функция $z = f(x_1, \dots, x_n)$ имеет в точке M_0 максимум, а в случае, когда этот дифференциал есть положительно определенная квадратичная форма, функция $z = f(x_1, \dots, x_n)$ имеет в точке M_0 минимум.

Пример П.2. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2x^2 + y^2 - 4x + 8y - 7.$$

Находим: $z'_x = 4x - 4$, $z'_y = 2y + 8$. Критические точки найдем из условия $z'_x = 4x - 4 = 0$ и $z'_y = 2y + 8 = 0$, т.е. $x = 1, y = -4$. Находим: $z''_{xx} = 4$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = 2$.

Составляем матрицу A квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Так как все угловые миноры матрицы положительны, то эта квадратичная форма положительно определена, а значит, в точке $(1, -4)$ функция z имеет минимум и

$$z_{\min} = 2 + 16 - 4 - 32 - 7 = -25.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Линейные пространства

Пример 1. Заданы векторы $\mathbf{x}_1 = (2, 3, 2)$, $\mathbf{x}_2 = (-1, 0, -1)$, $\mathbf{x}_3 = (2, 2, 2)$. Выясните, является ли система этих векторов линейно зависимой. Если система линейно зависима, то найдите зависимость между векторами (нулевую нетривиальную комбинацию векторов).

Решение. Составим матрицу из координат векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, записав координаты каждого из векторов в столбец матрицы с тем же номером, что и номер вектора:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если определитель матрицы A отличен от нуля, то векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ линейно независимы, в противном случае можно составить нулевую нетривиальную комбинацию этих векторов, т.е. линейную комбинацию, равную нулю и имеющую не все равные нулю коэффициенты. Итак, вычислим определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 4 + 4 + 6 = 0.$$

Определитель равен нулю, следовательно, векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ – линейно зависимы. Найдем нетривиальную линейную комбинацию этих векторов, равную нулю. Пусть α_1 , α_2 , α_3 – неизвестные постоянные, для которых нетривиальная линейная комбинация векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ равна нулю, т.е. выполняется равенство $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$, откуда получаем после подстановки векторов в их координатном виде

$$\alpha_1(2, 3, 2) + \alpha_2(-1, 0, -1) + \alpha_3(2, 2, 2) = \mathbf{0}$$

или

$$(2\alpha_1, 3\alpha_1, 2\alpha_1) + ((-1)\alpha_2, 0\alpha_2, (-1)\alpha_2) + (2\alpha_3, 2\alpha_3, 2\alpha_3) = \mathbf{0}$$

или

$$(2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, 3\alpha_1 + 2\alpha_3, 2\alpha_3 - \alpha_2 + 2\alpha_3) = (0, 0, 0).$$

Для координат этих двух равных между собой векторов соответственно получаем три уравнения $2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$, $3\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$, $2\alpha_3 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$, которые решаем совместно, как показано в [3], и находим значения постоянных $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -1.5$. Таким образом, линейная комбинация $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - 1.5\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ – нулевая нетривиальная комбинация заданных векторов.

Пример 2. Составить произвольную линейную комбинацию векторов $\mathbf{a} = (1,0,1)$, $\mathbf{b} = (2,1,-1)$, $\mathbf{c} = (1,3,2)$. При каких значениях констант линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору?

Решение. Возьмем произвольные постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, тогда линейная комбинация векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ запишется в виде

$$\alpha_1 \mathbf{a} + \alpha_2 \mathbf{b} + \alpha_3 \mathbf{c} = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(2,1,-1) + \alpha_3(1,3,2) = (\alpha_1, 0, \alpha_1) + (2\alpha_2, \alpha_2, -\alpha_2) + (\alpha_3, 3\alpha_3, 2\alpha_3) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3).$$

Эта линейная комбинация равна нулевому вектору, если

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) = (0,0,0) \text{ или } \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ – линейная комбинация векторов равна нулевому вектору только при одновременном равенстве нулю всех констант. Про такую систему векторов говорят, что она линейно независимая.

Пример 3. Определить количество линейно независимых векторов в системе векторов $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$, $\mathbf{e}_4 = (1,1,1,0)$. Можно ли считать эти вектора базисом в $\mathbb{R}^4$?

Решение. Векторы $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$, $\mathbf{e}_4 = (1,1,1,0)$ из линейного пространства $\mathbb{R}^4$ можно рассматривать как столбцы матрицы четвертого порядка. Записывая их координаты в соответствующие по номеру столбцы матрицы: $\mathbf{e}_1$ в первый столбец, $\mathbf{e}_2$ во второй столбец и т.д., получим следующую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

являющуюся матрицей четвертого порядка. Ее ранг равен 3, так как ее определитель $\Delta = 0$, поскольку 4-й столбец этой матрицы состоит из нулей, а в верхнем углу матрицы стоит единичная матрица третьего порядка. Следовательно, в матрице только три линейно независимых столбца, а тогда и рассматриваемая система векторов является линейно зависимой, поскольку условие равенства нулю определителя матрицы, составленной из координат векторов, является необходимым и достаточным условием их линейной зависимости. В заданной системе только три линейно независимых вектора и их нельзя взять в качестве базиса четырехмерного линейного пространства векторов.

Пример 4. Определите, является ли линейно независимой система функций $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$. Можно ли считать эту систему функций базисом линейного пространства многочленов степени не выше пятой?

Решение. Составим линейную комбинацию с произвольными константами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \in \mathbb{R}$ для заданных функций и приравняем ее нулю:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^4 + \alpha_6 x^5 = 0$$

или

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^4 + \alpha_6 x^5 = 0 \cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5,$$

откуда получаем равенства $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = 0$, $\alpha_6 = 0$, поскольку многочлены, стоящие в левой и правой части, должны быть равны при всех значениях x , а это возможно только при совпадении всех их коэффициентов при одинаковых степенях. Таким образом, рассматриваемая система функций является линейно независимой и может быть использована в качестве базиса в линейном пространстве многочленов степени не выше пятой.

Пример 5. Разложите вектор $x = (3, 4, 5, 7)$ по стандартному базису в R^4 .

Решение. Базис в R^4 может быть задан стандартным образом векторами $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. В этом базисе находим координаты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ вектора x из следующего равенства:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = (3, 4, 5, 7)$$

или

$$\alpha_1(1, 0, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, 0) + \alpha_3(0, 0, 1, 0) + \alpha_4(0, 0, 0, 1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (3, 4, 5, 7),$$

откуда $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 5$, $\alpha_4 = 7$ – найденные константы являются координатами вектора x в стандартном базисе.

Пример 6. Разложите многочлен $(x-1)^3$ по базису $1, x, x^2, x^3$.

Решение. Пусть многочлен $(x-1)^3$ имеет координаты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, тогда $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = (x-1)^3$. Раскроем выражение в правой части, тогда получим равенство $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, откуда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , являющихся базисными векторами в этом линейном пространстве (согласно примеру 1.14, с. 11), получаем координаты многочлена $(x-1)^3$ в базисе $1, x, x^2, x^3$: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = -3$, $\alpha_4 = 1$.

Пример 7. Определите размерность линейной оболочки векторов $a = (1, 0)$ и $b = (2, 1)$.

Решение. Линейная оболочка векторов – это множество линейных комбинаций этих векторов, т.е. все остальные вектора от них линейно зависят. Определим, является ли линейно независимой сама система векторов a, b .

Соответствующая матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеет ранг 2, т.е. состоит из линейно независимых столбцов, следовательно, вектор b линейно не зависит от вектора a , и оба этих вектора могут быть взяты в качестве базиса в линейной оболочке векторов и размерность линейной оболочки векторов a, b равна 2.

Пример 8. Определите размерность линейной оболочки векторов $a = (1, 0, 0)$ и $b = (1, 1, 0)$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру рассмотрим матрицу, составленную из координат векторов a, b :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она имеет ранг 2, т.е. оба вектора в данном случае являются линейно независимыми и могут быть взяты в качестве базисных. В силу того, что третьи координаты этих векторов равны нулю, другого типа векторов в данной линейной оболочке быть не может. Итак, векторы **a**, **b** образуют линейно независимую систему векторов максимально возможного в рассматриваемой линейной оболочке порядка, т.е. размерность линейной оболочки равна двум.

Пример 9. Определите размерность линейной оболочки векторов **a** = (1, -1, 1, 0), **b** = (2, 3, 1, 2) и **c** = (4, 1, 3, 4).

Решение. Рассмотрим матрицу, составленную из координат векторов **a**, **b**, **c**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Она имеет ранг 3, так как определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0,$$

т.е. все три вектора в данном случае являются линейно независимыми и могут быть взяты в качестве базисных. В силу определения линейной оболочки все остальные векторы в ней линейно зависимы от данных трех векторов и поэтому три – максимально возможное число линейно независимых векторов в рассматриваемой линейной оболочке, т.е. размерность линейной оболочки равна трем.

Пример 10. Найти координаты многочлена $P_3(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 3x^3$ в базисе 1, $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$.

Решение. Поскольку система функций 1, $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$ – заданный базис в линейном пространстве многочленов степени не выше трех, то заданный многочлен может быть записан в виде своего разложения по базису с неизвестными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 1 + 2x + 4x^2 + 3x^3 = \alpha_1 + \alpha_2(x-1) + \alpha_3(x-1)^2 + \alpha_4(x-1)^3 = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2x - \alpha_2 + \alpha_3(x^2 - 2x + 1) + \alpha_4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2x - \alpha_2 + \alpha_3x^2 - 2\alpha_3x + \alpha_3 + \alpha_4x^3 - 3\alpha_4x^2 + 3\alpha_4x - \alpha_4 = \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_2 - 2\alpha_3 + 3\alpha_4)x + (\alpha_3 - 3\alpha_4)x^2 + \alpha_4x^3, \end{aligned}$$

откуда

$$1 + 2x + 4x^2 + 3x^3 = (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_2 - 2\alpha_3 + 3\alpha_4)x + (\alpha_3 - 3\alpha_4)x^2 + \alpha_4x^3.$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях в полученном выражении, получаем

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 1, \alpha_2 - 2\alpha_3 + 3\alpha_4 = 2, \alpha_3 - 3\alpha_4 = 4, \alpha_4 = 3.$$

Итак, окончательно,

$$\alpha_4 = 3, \alpha_3 = 3\alpha_4 + 4 = 9 + 4 = 13, \alpha_2 = 2\alpha_3 - 3\alpha_4 + 2 = 26 - 9 + 2 = 19,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + 1 = 19 - 13 + 3 + 1 = 10,$$

т.е.

$$P_3(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 3x^3 = 10 + 19(x-1) + 13(x-1)^2 + 3(x-1)^3.$$

Пример 11. Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R^3 , если L задано уравнением $x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$.

Решение. Из уравнения получаем, что $x_1 = 2x_2 - 5x_3$, т.е. подпространство L состоит из векторов, полученных путем задания различных значений координат x_2, x_3 , но среди этих пар только две будут линейно независимыми, а именно $(x_2 = 1, x_3 = 0)$ и $(x_2 = 0, x_3 = 1)$, поэтому среди всех возможных векторов только два: $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 0)$ и $\mathbf{a}_2 = (-5, 0, 1)$, полученные путем их подстановки в выражение для первой координаты векторов из подпространства L , будут также линейно независимыми. А это значит, что они – базис подпространства и размерность подпространства L равна двум.

Пример 12. Проверить, что векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (3, -3, 4)$, $\mathbf{e}_3 = (-2, 2, 3)$ образуют ортогональный базис и для вектора $\mathbf{x} = (7, 2, 3)$ найти разложение по этому базису.

Решение. Действительно, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 3 - 3 + 0 = 0$; $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = -2 + 2 + 0 = 0$; $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = -6 - 6 + 12 = 0$, т.е. векторы ортогональны друг другу и, следовательно, все три вектора линейно независимы. Таким образом, они образуют ортогональный базис в линейном пространстве. Найдем разложение вектора $\mathbf{x} = (7, 2, 3)$ по этим векторам:

$$\mathbf{x} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где x_1, x_2, x_3 – координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (3, -3, 4)$, $\mathbf{e}_3 = (-2, 2, 3)$.

Поскольку для последующих вычислений требуется определить матрицу A^{-1} , обратную для матрицы A , вспомним алгоритм вычисления обратной матрицы. Сначала вычисляется определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 8 - 8 - 9 = -34,$$

затем для всех элементов матрицы $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, транспонированной

к матрице A , определяются их алгебраические дополнения, а именно,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 8 = -17;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 8 = -17; A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0; A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4; A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6.$$

Матрица A^{-1} определяется из равенства:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -17 & -17 & 0 \\ -3 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 17/34 & 17/34 & 0 \\ 3/34 & -3/34 & 4/34 \\ -4/34 & 4/34 & 6/34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/34 & -3/34 & 2/17 \\ -2/17 & 2/17 & 3/17 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты вектора x в базисе e_1, e_2, e_3 , умножив слева уравнение на матрицу A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/34 & -3/34 & 2/17 \\ -2/17 & 2/17 & 3/17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 27/34 \\ -1/17 \end{pmatrix}.$$

Пример 13. Базисы $e = (e_1, e_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} e_1 = b_1 - 2b_2 \\ e_2 = b_1 + 2b_2 \end{cases}.$$

Запишите матрицу перехода U от базиса b к базису e , вычислите обратную ей матрицу U^{-1} (она является матрицей перехода от базиса e к базису b) и запишите соотношения, связывающие базисные вектора (b_1, b_2) с базисными векторами (e_1, e_2) .

Решение. Поскольку $\mathbf{e} = \mathbf{b}U$, можно записать матрицу перехода U от старого базиса $\mathbf{b}$ к новому $\mathbf{e}$:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

определитель которой $\Delta = 4$, т.е. обратная матрица существует и она равна

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix},$$

следовательно, $\mathbf{b} = \mathbf{e}U^{-1}$ или

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = 0,5\mathbf{e}_1 + 0,25\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{b}_2 = -0,5\mathbf{e}_1 + 0,25\mathbf{e}_2. \end{cases}$$

Пример 14. Базисы $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \end{cases}$$

Запишите матрицу перехода U от базиса $\mathbf{b}$ к базису $\mathbf{e}$, вычислите обратную ей матрицу U^{-1} (она является матрицей перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{b}$) и запишите соотношения, связывающие базисные вектора $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ с базисными векторами $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Решение. Матрица перехода от старого базиса к новому

$$U_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и определитель ее равен -2 , т.е. обратная матрица существует и она равна

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = -0,5\mathbf{e}_1 + 0,5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{b}_2 = 0,5\mathbf{e}_1 + 0,5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{b}_3 = 0,5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 0,5\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Из примеров № 13 и № 14 видим, что координаты векторов старого базиса в новом являются столбцами матрицы U^{-1} , а координаты векторов нового базиса в старом – столбцами матрицы U .

Пример 15. Пусть вектор $\mathbf{x} = (3, 1)$ в базисе $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. Найдите его координаты в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, если

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 \end{cases}$$

Решение. Матрица перехода от базиса $\mathbf{b}$ к базису $\mathbf{e}$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора в старом базисе связаны с его координатами в новом базисе следующим образом: $\mathbf{x} = U\mathbf{x}'$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ – столбцы координат вектора $\mathbf{x}$ в старом и новом базисах соответственно. Нам заданы координаты вектора в новом базисе $\mathbf{e}$, т.е.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 16. Пусть вектор $\mathbf{x} = (2, 3)$ в базисе $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. Найдите его координаты в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, если

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

Решение. Матрица перехода

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

и аналогично предыдущей задаче находим координаты вектора в старом базисе через его координаты в новом базисе:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Пример 17. Матрица перехода $U_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{b}}$ от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{b}$ равна

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi & -2\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{x} = (1, 2, 4)$ в базисе $\mathbf{e}$. Найдите его координаты в базисе $\mathbf{b}$.

Решение. Матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{b}$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi & -2\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

и заданы координаты вектора $\mathbf{x}$ в старом базисе. Его координаты в новом базисе находятся по формуле $\mathbf{x}' = U^{-1}\mathbf{x}$. Находим матрицу

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5\cos\varphi & 0,5\sin\varphi \\ 0 & -0,5\sin\varphi & 0,5\cos\varphi \end{pmatrix}$$

и определяем координаты вектора x в новом базисе:

$$x' = U^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5\cos\varphi & 0,5\sin\varphi \\ 0 & -0,5\sin\varphi & 0,5\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\varphi + 2\sin\varphi \\ -\sin\varphi + 2\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Пример 18. Матрица перехода $U_{e \rightarrow b}$ от базиса e к базису b равна

$$\begin{pmatrix} 3\cos\varphi & -3\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $x = (1, 5, 2\sin\varphi)$ в базисе e . Найдите его координаты в базисе b .

Решение. Матрица перехода от базиса e к базису b

$$U = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi & -3\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3\cos\varphi & 1/3\sin\varphi & 0 \\ -1/3\sin\varphi & 1/3\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$x' = U^{-1}x = \begin{pmatrix} 1/3\cos\varphi & 1/3\sin\varphi & 0 \\ -1/3\sin\varphi & 1/3\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3\cos\varphi + 5/3\sin\varphi \\ -1/3\sin\varphi + 5/3\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Пример 19. Нормировать вектор $x = 3i + 4j + 12k$.

Решение. Нормировать вектор – значит найти единичный вектор, соответствующий данному. Для этого нужно разделить заданный вектор на его норму или его длину, которая определяется формулой $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, где $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 12$ для заданного вектора. Таким образом, длина вектора x равна $\sqrt{9 + 16 + 144} = 13$ и нормированный вектор $x_1 = 3/13i + 4/13j + 12/13k$.

Пример 20. Убедитесь, что в R^3 векторы $a_1 = (1, -2, 2)$, $a_2 = (-2, -2, -1)$, $a_3 = (2, -1, -2)$ образуют ортогональный базис и найдите разложение по этому базису вектора $x = (3, 12, 6)$.

Решение. Действительно, $(a_1, a_2) = -2 + 4 - 2 = 0$, $(a_1, a_3) = -4 + 2 + 2 = 0$, $(a_2, a_3) = 2 + 2 - 4 = 0$. Матрица перехода от базиса исходного к базису (a_1, a_2, a_3) имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

откуда

$$U^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -6 & -6 & -3 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

и координаты вектора x в новом базисе равны

$$x' = U^{-1}x = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -6 & -6 & -3 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 21. Убедитесь, что в R^3 векторы $a_1 = (1, -1, 1)$, $a_2 = (-1, -2, -1)$, $a_3 = (1, 0, -1)$ образуют ортогональный базис, и найдите разложение по этому базису вектора $x = (9, 15, 3)$.

Решение. Действительно, $(a_1, a_2) = -1 + 2 - 1 = 0$, $(a_1, a_3) = 1 + 0 - 1 = 0$, $(a_2, a_3) = -1 + 0 + 1 = 0$. Матрица перехода от базиса исходного к базису (a_1, a_2, a_3) имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$U^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

и координаты вектора x в новом базисе равны

$$x' = U^{-1}x = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Линейные операторы

Пример 22. Запишите в заданном базисе матрицы следующих линейных операторов:

- а) оператора ортогонального проектирования на плоскость xOy , базис i, j, k ;
- б) оператора ортогонального проектирования на ось Oy , базис i, j, k .

Решение. а) Поскольку оператор A проецирует пространство V^3 на плоскость xOy , то для координат произвольного вектора его действие можно записать $A: (x, y, z) \rightarrow (x, y, 0)$, поэтому получим для векторов стандартного базиса пространства V^3 следующие образы: $A(1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0)$, $A(0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0)$, $A(0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 0)$, т.е. матрица оператора, состоящая из столбцов, соответствующих координатам векторов – образов базисных векторов, будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Поскольку оператор A проецирует пространство V^3 на ось Oy , то имеем отображение $A: (x, y, z) \rightarrow (0, y, 0)$, поэтому получим для векторов стандартного базиса пространства V^3 следующие образы: $A(1, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$, $A(0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0)$, $A(0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 0)$, т.е. матрица оператора, состоящая из столбцов, соответствующих координатам векторов – образов базисных векторов, будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 23. Запишите в заданном базисе матрицы следующих линейных операторов:

- а) оператора ортогонального проектирования на плоскость xOz , базис i, j, k ;
- б) оператора ортогонального проектирования на ось Oz , базис i, j, k .

Решение. а) Поскольку оператор A проецирует пространство V^3 на плоскость yOz , то для координат произвольного вектора его действие можно записать $A: (x, y, z) \rightarrow (0, y, z)$, поэтому получим для векторов стандартного базиса пространства V^3 следующие образы: $A(1, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$, $A(0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0)$, $A(0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1)$, т.е. матрица оператора, состоящая из столбцов, соответствующих координатам векторов – образов базисных векторов, будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Поскольку оператор A проецирует пространство V^3 на ось Oz , то имеем отображение $A: (x, y, z) \rightarrow (0, 0, z)$, поэтому получим для векторов стандартного базиса пространства V^3 следующие образы: $A(1, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$, $A(0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0)$, $A(0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 0)$, т.е. матрица оператора, состоящая из столбцов, соответствующих координатам векторов – образов базисных векторов, будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 24. Определить координаты векторов $A(v_i)$, $i = 1, 2, 3$, если линейный оператор, осуществляющий преобразование $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и векторы $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (3, -2, -3)$, $v_3 = (-1, -2, -3)$.

Решение. Координаты вектора определяются из равенства $A(v_1) = Av_1$ или для координат этих векторов в одном и том же базисе получаем равенство

$$\begin{pmatrix} A(v_1)_1 \\ A(v_1)_2 \\ A(v_1)_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} (v_1)_1 \\ (v_1)_2 \\ (v_1)_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

аналогично получаем

$$\begin{pmatrix} A(v_2)_1 \\ A(v_2)_2 \\ A(v_2)_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A(v_3)_1 \\ A(v_3)_2 \\ A(v_3)_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$A(v_1) = (1, 0, 1), \quad A(v_2) = (-2, 1, 3), \quad A(v_3) = (-6, -3, -1).$$

Пример 25. Линейный оператор A , действующий в $\mathbb{R}^3$, переводит векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3 соответственно. Найдите его матрицу, если векторы-столбцы из $\mathbb{R}^3$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Согласно определению матрицы линейного оператора, связывающей координаты вектора-прообраза с координатами вектора-образа, имеем равенство $A(a_1 \ a_2 \ a_3) = (b_1 \ b_2 \ b_3)$ или в координатной форме

$$A \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

• откуда получаем матрицу оператора **A**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/5 & 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 6/5 & -3/5 \\ 9/5 & 2/5 & -6/5 \\ 12/5 & 21/5 & -13/5 \end{pmatrix}.$$

Пример 26. Линейный оператор **A**, действующий в $\mathbb{R}^3$, переводит векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ в векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ соответственно. Найдите его матрицу, если векторы-столбцы из $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Согласно определению матрицы линейного оператора, связывающей координаты вектора-прообраза с координатами вектора-образа, имеем равенство $A(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3) = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3)$ или в координатной форме

$$A \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда получаем матрицу оператора **A**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 11/15 \\ -1/5 & 1/3 & 2/15 \\ 1 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7/15 & 1 & 3 \\ -10/3 & 3 & 14 \\ 19/15 & -1/3 & -17/15 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения и собственные векторы

Пример 27. Дана матрица $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ линейного оператора **A**. Найти его собственные значения и собственные векторы.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0, \text{ т.е. } \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0.$$

Собственными числами оператора будут числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7$. Находим собственный вектор, соответствующий первому собственному значению, из системы уравнений

$$\begin{cases} (5 - \lambda_1)\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \\ 4\xi_1 + (3 - \lambda_1)\xi_2 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \\ 4\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \end{cases}, \text{ т.е. } 2\xi_1 + \xi_2 = 0,$$

откуда, положив $\xi_1 = 1$, получаем $\xi_2 = -2$ и собственным вектором, соответствующим характеристическому числу $\lambda_1 = 1$, будет вектор $x = i - 2j$. Найдем второй собственный вектор. Имеем

$$\begin{cases} (5 - \lambda_2)\xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 4\xi_1 + (3 - \lambda_2)\xi_2 = 0 \end{cases}$$

т.к. $\lambda_2 = 7$, то

$$\begin{cases} -2\xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 4\xi_1 - 4\xi_2 = 0 \end{cases}$$

или

$$\xi_1 - \xi_2 = 0, \text{ т.е. } \xi_1 = \xi_2 = 1.$$

Собственным вектором, соответствующим второму характеристическому числу, будет $x = i + j$.

Пример 28. Найти собственные значения и собственные векторы

оператора **A**, если его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(3-\lambda)[(5-\lambda)(3-\lambda)-1] + (-3+\lambda+1) + (1-5+\lambda) = 0.$$

После преобразований уравнение приводится к виду $(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0$, откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 2$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 = 0, \\ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases}$$

находим, что $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = -\xi_1$, полагая $\xi_1 = 1$, находим первый собственный

вектор $\mathbf{x}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{k}$. Находим второй собственный вектор из системы для $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{cases} -\xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 = 0, \\ \xi_1 - \xi_2 = 0 \end{cases}$$

откуда получаем $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = a$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Находим третий собственный вектор, соответствующий $\lambda_3 = 6$. Система имеет вид:

$$\begin{cases} -3\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0, \\ \xi_1 - \xi_2 - 3\xi_3 = 0 \end{cases}$$

откуда $\xi_1 = \xi_3 = c$ и $\xi_2 = -2c$, т.е. $\mathbf{x}_3 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Квадратичные формы

Пример 29. Для симметрической матрицы квадратичной формы $x^2 + y^2 + 3xy$ найти подобную ей диагональную матрицу $A' = P^{-1}AP$ и соответствующую ей ортогональную матрицу P . Является ли квадратичная форма положительно определенной?

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1,5 \\ 1,5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(1-\lambda)^2 - 2,25 = 0,$$

откуда получаем уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 1,25 = 0$, корнями которого будут $\lambda_1 = 2,5$ и $\lambda_2 = -0,5$. Полагая $\lambda_1 = 2,5$, для определения соответствующего собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -1,5\xi_1 + 1,5\xi_2 = 0, \\ 1,5\xi_1 - 1,5\xi_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $\xi_1 = \xi_2 = c$ и собственный вектор $\mathbf{x}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Для $\lambda_2 = -0,5$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1,5\xi_1 + 1,5\xi_2 = 0, \\ 1,5\xi_1 + 1,5\xi_2 = 0, \end{cases}$$

или $\xi_1 = c$, $\xi_2 = -c$ и второй собственный вектор равен $\mathbf{x}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Нормируя эти векторы, получаем векторы $\mathbf{a}_1 = 1/\sqrt{2} \mathbf{i} + 1/\sqrt{2} \mathbf{j}$ и $\mathbf{a}_2 = 1/\sqrt{2} \mathbf{i} - 1/\sqrt{2} \mathbf{j}$, координаты которых определяют ортогональную матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

а следовательно, и обратную ей матрицу

$$P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

переводящую квадратичную форму в канонический вид. Поскольку в базисе $a_1 = 1/\sqrt{2} i + 1/\sqrt{2} j$ и $a_2 = 1/\sqrt{2} i - 1/\sqrt{2} j$

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1,5 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2,5/\sqrt{2} & 2,5/\sqrt{2} \\ -0,5/\sqrt{2} & 0,5/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то квадратическая форма принимает в новых координатах канонический вид $2,5 (x')^2 - 0,5 (y')^2$. При этом старые координаты выражаются через новые координаты по формулам $x = 1/\sqrt{2} x' - 1/\sqrt{2} y'$, $y = 1/\sqrt{2} x' + 1/\sqrt{2} y'$. Так как второе собственное значение у данной квадратичной формы отрицательно, то квадратичная форма не является положительно определенной.

Пример 30. Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$x^2 - y^2 - 4xy + 10y = 0.$$

Решение. Уравнение кривой содержит квадратичную форму, которую приведем к каноническому виду методом выделения полных квадратов. Приведение к каноническому виду уравнения кривой заключается в таком преобразовании его, чтобы оно не содержало произведения переменных. Группируем члены, содержащие x и y :

$$(x^2 - 4xy) - (y^2 - 10y) = 0.$$

Дополняем до полных квадратов выражения в скобках:

$$(x^2 - 4xy + 4y^2) - (5y^2 - 10y + 5) - 5 = 0,$$

или

$$(x - 2y)^2 - 5(y - 1)^2 - 5 = 0.$$

Сделаем параллельный перенос – это линейное преобразование – и приняв за новые переменные x' , y' такие, что $x' = x - 2y$, $y' = y - 1$, получим уравнение поверхности в каноническом виде:

$$(x')^2 - 5(y')^2 - 5 = 0$$

– это уравнение определяет гиперболу. Квадратичная форма в этом случае также не является положительно определенной, т.к. коэффициент перед переменной y отрицателен.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритмы
1.	Проведение доказательства принадлежности множества с определенными в нем операциями к линейным пространствам	1. Выбрав два элемента a и b заданного множества, проверить выполнение закона коммутативности сложения $a + b = b + a$. 2. Выбрав три элемента a, b, c множества, проверить выполнение закона ассоциативности сложения $(a + b) + c = a + (b + c)$. 3. Найти во множестве нулевой элемент, т.е. элемент 0 такой, что $0 + a = a$. 4. Выбрав элемент a множества, найти противоположный ему элемент, т.е. элемент (-a) такой, что $a + (-a) = 0$. 5. Проверить для числа 1 выполнение равенства $a \cdot 1 = a$. 6. Для чисел $\lambda, \mu \in R$ проверить выполнение равенства $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$. 7. Проверить для чисел $\lambda, \mu \in R$ выполнение равенства $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$. 8. Для двух элементов множества a и b и $\lambda \in R$ проверить выполнение равенства $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.
2.	Исследование системы векторов на линейную независимость	1. Составить линейную комбинацию из заданных векторов с неизвестными коэффициентами $\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c$. 2. Приравнять линейную комбинацию векторов нулевому вектору. 3. Записать покоординатные равенства в систему. 4. Решить систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов, для чего привести матрицу системы к ступенчатому виду. 5. Определить число ненулевых угловых элементов в ступенчатой матрице - оно определяет число линейно независимых векторов в рассматриваемой системе векторов.
3.	Определение размерности линейного пространства	1. Записать матрицу A для однородной системы алгебраических уравнений. 2. Решить систему алгебраических уравнений (см. [3]). 3. По общему решению системы найти фундаментальную систему решений, взяв в качестве значений свободных переменных такие, чтобы матрица, составленная из них, была единичной матрицей порядка, равного числу свободных переменных. 4. Определить размерность линейного пространства решений системы, которое равно количеству векторов, образующих фундаментальную систему решений.

№ п/п	Умение	Алгоритмы
4.	Определение координат вектора в произвольном базисе	1. Составить матрицу перехода U от базиса $\mathbf{b}$ к базису $\mathbf{e}$, поставив в первый столбец матрицы коэффициенты первого уравнения, во второй столбец коэффициенты второго уравнения и т.д. 2. Найти матрицу U^{-1}, обратную матрице U (см. [3]). 3. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}$, для чего вычислить произведение $U^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{x}'$, где $\mathbf{x}$ – столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{b}$, а $\mathbf{x}'$ – столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}$. 4. Записать вектор $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}$: $\mathbf{x} = x'_1 \mathbf{e}_1 + x'_2 \mathbf{e}_2 + x'_3 \mathbf{e}_3$.
5.	Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису	1. Составить матрицу перехода U от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{b}$, поставив в первый столбец матрицы коэффициенты первого уравнения, во второй столбец коэффициенты второго уравнения и т.д. 2. Найти матрицу U^{-1}, обратную матрице U (см. [3]). 3. Найти произведение матриц $U^{-1} A_{\mathbf{e}}$. 4. Найти произведение матриц $U^{-1} A_{\mathbf{e}} U = (U^{-1} A_{\mathbf{e}}) U = A_{\mathbf{b}},$ равное матрице оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{b}$.
6.	Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы	1. Составить характеристический многочлен $P_{\lambda} = A_{\mathbf{e}} - \lambda E$ для матрицы $A_{\mathbf{e}}$ линейного оператора $\mathbf{A}$. 2. Получить характеристическое уравнение оператора $\mathbf{A}$, для чего приравнять характеристический многочлен нулю. 3. Найти корни характеристического уравнения, разрешив его относительно неизвестного λ, полученные корни – собственные значения линейного оператора. 4. Составить систему уравнений для определения собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_1: $A_{\mathbf{e}} - \lambda_1 E = 0$. 5. Найти фундаментальную систему решений полученной системы линейных алгебраических уравнений (см. [3]). 6. Составить систему уравнений для определения собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_2: $A_{\mathbf{e}} - \lambda_2 E = 0$. 7. Найти фундаментальную систему решений полученной системы линейных алгебраических уравнений. 8. Составить систему уравнений для определения собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_3: $A_{\mathbf{e}} - \lambda_3 E = 0$. 9. Найти фундаментальную систему решений полученной системы линейных алгебраических уравнений.

№ п/п	Умение	Алгоритмы
7.	Построение ортогонального базиса по заданному	1. Составить матрицу A из координат векторов a_1, a_2, a_3, записав в первый столбец матрицы координаты вектора a_1, во второй – координаты вектора a_2, в третий координаты вектора a_3. 2. Вычислить определитель матрицы A: $\det A$. 3. Если матрица A удовлетворяет условию $\det A \neq 0$, то заданная система векторов образует базис в R^3 и может быть взята за исходную для построения ортонормированного базиса. В противном случае заданную систему векторов использовать для построения ортонормированного базиса нельзя. 4. Вычислить векторы $g_1 = a_1$ и $e_1 = \frac{g_1}{\ g_1\ }$. 5. Вычислить векторы $g_2 = a_2 - (a_2, e_1)e_1$ и $e_2 = \frac{g_2}{\ g_2\ }$. 6. Вычислить векторы $g_3 = a_3 - (a_3, e_1)e_1 - (a_3, e_2)e_2$ и $e_3 = \frac{g_3}{\ g_3\ }$.
8.	Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом выделения квадратов	1. Сгруппировать члены квадратичной формы, содержащие квадрат переменной x и ее произведение на какую-либо другую переменную, квадрат переменной y и ее произведение на переменную, отличную от x. 2. Дополнить каждое из выражений, стоящих в скобках, до полного квадрата, вычтя из всего уравнения дополнительно прибавленные члены, чтобы оно не изменилось по сравнению с исходным видом квадратичной формы. 3. Записать квадратичную форму в виде суммы квадратов, получившихся в результате преобразований. 4. Перейти к новым координатам, заменив каждое из выражений, возводимое в квадрат, на новую координату, получить канонический вид записи квадратичной формы.
9.	Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием	1. Составить матрицу квадратичной формы. 2. Составить характеристическое уравнение для матрицы A и найти его корни (собственные значения квадратичной формы). 3. Найти канонический вид квадратичной формы. 4. Найти собственные векторы, соответствующие собственным значениям. 5. Пронормировать собственные векторы. 6. Составить из столбцов координат пронормированных собственных векторов матрицу ортонормированного преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения на умение № 1.

Задание

Является ли линейным пространством заданное множество, если множество – это множество всех векторов трехмерного пространства, координаты которых – целые числа, сложение векторов и умножение на число определены общепринятым способом, т.е. если $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ соответственно $\alpha \mathbf{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$?

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Выбрав два элемента $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданного множества, проверить выполнение закона коммутативности сложения $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, $\mathbf{b} + \mathbf{a} = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3) =$ [поскольку сложение действительных чисел коммутативно] $= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$
2.	Выбрав три элемента $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ множества, проверить выполнение закона ассоциативности сложения $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$	$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) +$ $+ (c_1, c_2, c_3) = (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2,$ $a_3 + b_3 + c_3)$, аналогично, $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (a_1, a_2, a_3) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2,$ $b_3 + c_3) = (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2,$ $a_3 + b_3 + c_3) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3.	Найти во множестве нулевой элемент, т.е. элемент $\mathbf{0}$ такой, что $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$	В этом множестве таким элементом является вектор $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, т.к. $\mathbf{0} + \mathbf{a} = (0, 0, 0) + (a_1, a_2, a_3) =$ $= (a_1, a_2, a_3) = \mathbf{a}$
4.	Выбрав элемент $\mathbf{a}$ множества, найти противоположный ему элемент, т.е. элемент $(-\mathbf{a})$ такой, что $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$	Возьмем вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, а в качестве $-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$, тогда $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (a_1, a_2, a_3) + (-a_1, -a_2, -a_3) =$ $= (a_1 - a_1, a_2 - a_2, a_3 - a_3) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$, т.е. элемент $-\mathbf{a}$ – противоположный для $\mathbf{a}$
5.	Проверить для числа 1 выполнение равенства $\mathbf{a} \cdot 1 = \mathbf{a}$	$\mathbf{a} \cdot 1 = (a_1, a_2, a_3) \cdot 1 = (a_1, a_2, a_3) = \mathbf{a}$
6.	Для чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ проверить выполнение равенства $\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$	$\lambda(\mu \mathbf{a}) = \lambda(\mu (a_1, a_2, a_3)) =$ $= \lambda(\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) = (\lambda\mu a_1, \lambda\mu a_2, \lambda\mu a_3) =$ $= (\lambda\mu)(a_1, a_2, a_3) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
7.	Проверить для чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ выполнение равенства $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$	$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = (\lambda + \mu)(a_1, a_2, a_3) = ((\lambda + \mu)a_1, (\lambda + \mu)a_2, (\lambda + \mu)a_3) = (\lambda a_1 + \mu a_1, \lambda a_2 + \mu a_2, \lambda a_3 + \mu a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) + (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$
8.	Для двух элементов множества $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ проверить выполнение равенства $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$	$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)) = \lambda(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = (\lambda(a_1 + b_1), \lambda(a_2 + b_2), \lambda(a_3 + b_3)) = (\lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda a_2 + \lambda b_2, \lambda a_3 + \lambda b_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) + (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$

Так как для множества всех векторов трехмерного пространства выполняются все аксиомы линейного пространства, то данное множество с введенными операциями является линейным пространством.

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задание 1.1

Образует ли множество всех векторов, лежащих на одной оси, линейное пространство, если сумма двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равна $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, произведение числа α на вектор $\mathbf{a}$ равно $\alpha\mathbf{a}$?

Задание 1.2

Является ли линейным пространством множество всех непрерывных функций $a = f(t)$ и $b = g(t)$, принимающих положительное значение, если сумма $a + b = f(t) + g(t)$, $\alpha a = \alpha f(t)$?

Задание 1.3

Образует ли линейное пространство множество всех непрерывных функций $a = f(t)$ и $b = g(t)$, заданных на $[0,1]$?

Задание 1.4

Образует ли линейное пространство множество всех многочленов третьей степени от переменной x , если их сумма задается $a + b$, а произведение на число αa ?

Задание 1.5

Образует ли линейное пространство множество всех положительных чисел, если сумма чисел и произведение на число заданы обычным образом?

2. Пример выполнения упражнения на умение № 2.

Задание

Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

$$\mathbf{a} = (1, 4, 6), \mathbf{b} = (1, -1, 1), \mathbf{c} = (1, 1, 3).$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Составить линейную комбинацию из заданных векторов с неизвестными коэффициентами $\alpha_1 \mathbf{a} + \alpha_2 \mathbf{b} + \alpha_3 \mathbf{c}$	$\alpha_1 \mathbf{a} + \alpha_2 \mathbf{b} + \alpha_3 \mathbf{c} =$ $= \alpha_1(1, 4, 6) + \alpha_2(1, -1, 1) + \alpha_3(1, 1, 3) =$ $= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 4\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, 6\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3)$
2.	Приравнять линейную комбинацию векторов нулевому вектору	$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 4\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, 6\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3) =$ $= (0, 0, 0)$
3.	Записать по координатным равенства в систему	$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 4\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 6\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$
4.	Решить систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов, для чего привести матрицу системы к ступенчатому виду	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.	Определить число ненулевых угловых элементов в ступенчатой матрице - оно определяет число линейно независимых векторов в рассматриваемой системе векторов	В ступенчатой матрице 2 ненулевых угловых элемента, следовательно, в рассматриваемой системе векторов только два вектора линейно независимы, а система из трех векторов линейно зависима.

Система векторов линейно зависима. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – линейно независимы.

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задание 2.1

Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

$$\mathbf{a} = (-2, 1, 5), \mathbf{b} = (4, -3, 0), \mathbf{c} = (0, -1, 10).$$

Задание 2.2

Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

$$\mathbf{a} = (2, 0, 2), \mathbf{b} = (1, -1, 0), \mathbf{c} = (0, -1, -2).$$

Задание 2.3

Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

$$\mathbf{a} = (5, 4, 3), \mathbf{b} = (3, 3, 2), \mathbf{c} = (8, 1, 3).$$

Задание 2.4

Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

$$\mathbf{a} = (1, 1, 1), \mathbf{b} = (0, 1, 1), \mathbf{c} = (0, 0, 1).$$

Задание 2.5

Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

$$\mathbf{a} = (1, 2, 3), \mathbf{b} = (4, 5, 6), \mathbf{c} = (2, -1, 3).$$

3. Пример выполнения упражнения на умение № 3.

Задание

Определить размерность линейного пространства решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложению алгоритму
1.	Записать матрицу A для однородной системы алгебраических уравнений	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
2.	Решить систему алгебраических уравнений [см. 3]	Приводим матрицу A к ступенчатому виду: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ - в ступенчатой матрице}$ две ступеньки, два угловых элемента, значит, ранг матрицы A равен 2, с угловыми элементами связаны переменные x_1 и x_2 - они будут несвободными, а переменные x_3, x_4, x_5 - свободными. Из соответствующей полученной матрицы ступенчатой системы $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$ получаем соотношения для общего решения системы $\begin{cases} x_1 = 3x_3 + x_5, \\ x_2 = -4x_3 + x_4 \end{cases}$
3.	По общему решению системы найти фундаментальную систему решений, взяв в качестве значений свободных переменных такие, чтобы матрица, составленная из них, была единичной матрицей порядка, равного числу свободных переменных	Зададим следующие значения свободным переменным x_3, x_4, x_5: 1) $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$; 2) $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$; 3) $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$, тогда их значения образуют матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \text{ т.е. эти три вектора}$ линейно независимы. Найдя соответствующие значения несвободных переменных x_1 и x_2: 1) $x_1 = 3, x_2 = -4$; 2) $x_1 = 0, x_2 = 1$; 3) $x_1 = 1, x_2 = 0$, получаем следующие векторы - решения системы: $X_1 = (3, -4, 1, 0, 0), X_2 = (0, 1, 0, 1, 0), X_3 = (1, 0, 0, 0, 1)$, образующие фундаментальную систему решений. Линейное пространство решений системы является линейной оболочкой решений фундаментальной системы.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
4.	Определить размерность линейного пространства решений системы, которое равно количеству векторов, образующих фундаментальную систему решений.	В фундаментальную систему решений входят три линейно независимых вектора, так как ранг этой системы равен рангу единичной матрицы и равен трем, следовательно, размерность линейного пространства решений равна трем.

Размерность линейного пространства решений предложенной однородной системы алгебраических уравнений равна трем.

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задание 3.1

Определите размерность линейного пространства решений системы:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Задание 3.2

Определите размерность линейного пространства решений системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Задание 3.3

Определите размерность линейного пространства решений системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Задание 3.4

Определите размерность линейного пространства решений системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Задание 3.5

Определите размерность линейного пространства решений системы:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$$

4. Пример выполнения упражнения на умение № 4.

Задание

Дан вектор $\mathbf{x} = (-1, 4, 3)$ в базисе $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Найти его координаты в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, если базисы связаны соотношениями $\mathbf{e}_1 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - 3\mathbf{b}_3$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$, $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Составить матрицу перехода U от базиса $\mathbf{b}$ к базису $\mathbf{e}$, поставив в первый столбец матрицы коэффициенты первого уравнения, во второй столбец коэффициенты второго уравнения и т.д.	$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
2.	Найти матрицу U^{-1} , обратную матрице U [см. 3]	$U_{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -8 & -5 & 1 \\ -7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$
3.	Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}$, для чего вычислить произведение $U^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{x}'$, где $\mathbf{x}$ - столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{b}$, а $\mathbf{x}'$ - столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}$.	$U^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -8 & -5 & 1 \\ -7 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}.$
4.	Записать вектор $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}$: $\mathbf{x} = x'_1 \mathbf{e}_1 + x'_2 \mathbf{e}_2 + x'_3 \mathbf{e}_3$	$\mathbf{x} = -2\mathbf{e}_1 - 9\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3$

Координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}$ равны: $x'_1 = -2$, $x'_2 = -9$, $x'_3 = -6$.

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задание 4.1

Дан вектор $\mathbf{x} = (6, -1, 3)$ в базисе $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Найти его координаты в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, если базисы связаны соотношениями $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$.

Задание 4.2

Дан вектор $\mathbf{x} = (1, 3, 6)$ в базисе $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Найти его координаты в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, если базисы связаны соотношениями $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3$, $\mathbf{e}_2 = \frac{4}{3}\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$.

Задание 4.3

Дан вектор $\mathbf{x} = (-1, 7, 14)$ в базисе $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Найти его координаты в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, если базисы связаны соотношениями $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 8\mathbf{b}_3$, $\mathbf{e}_2 = \frac{8}{7}\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$.

Задание 4.4

Дан вектор $\mathbf{x} = (-3, 2, 4)$ в базисе $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Найти его координаты в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, если базисы связаны соотношениями $\mathbf{e}_1 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$, $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$.

Задание 4.5

Дан вектор $\mathbf{x} = (2, 4, 3)$ в базисе $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Найти его координаты в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, если базисы связаны соотношениями $\mathbf{e}_1 = -\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 0,5\mathbf{b}_3$, $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$.

5. Пример выполнения упражнения на умение № 5.

Задание

Линейный оператор $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, если базисы связаны соотношениями

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{b}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Составить матрицу перехода U от базиса e к базису b , поставив в первый столбец матрицы коэффициенты первого уравнения, во второй столбец коэффициенты второго уравнения и т.д.	$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2.	Найти матрицу U^{-1} , обратную матрице U (см. [3])	$U^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3.	Найти произведение матриц $U^{-1} A_e$	$U^{-1} A_e = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 7 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
4.	Найти произведение матриц $U^{-1} A_e U = (U^{-1} A_e) U = A_b$, равное матрице оператора A в базисе b	$U^{-1} A_e U = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 7 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} = A_b$

Матрица линейного оператора в базисе $b = (b_1, b_2, b_3)$ равна

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задание 5.1

Линейный оператор A в базисе $e = (e_1, e_2, e_3)$ имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, если базисы связаны соотношениями

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{b}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{b}_3 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Задание 5.2

Линейный оператор $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ имеет матрицу

$$A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, если базисы связаны соотношениями

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{b}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Задание 5.3

Линейный оператор $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ имеет матрицу

$$A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, если базисы связаны соотношениями

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{b}_2 = 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Задание 5.4

Линейный оператор A в базисе $e = (e_1, e_2, e_3)$ имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе $b = (b_1, b_2, b_3)$, если базисы связаны соотношениями

$$\begin{cases} b_1 = e_1 + e_2 - 6e_3, \\ b_2 = (6/7)e_1 - e_2, \\ b_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5.5

Линейный оператор A в базисе $e = (e_1, e_2, e_3)$ имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе $b = (b_1, b_2, b_3)$, если базисы связаны соотношениями

$$\begin{cases} b_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \\ b_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \\ b_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3. \end{cases}$$



.

6. Пример выполнения упражнения на умение № 6.

Задание

Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора A , имеющего в некотором базисе $e = (e_1, e_2, e_3)$ матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Составить характеристический многочлен $P_\lambda = A_c - \lambda E $ для матрицы A_c линейного оператора A	$ A_c - \lambda E = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$ $= (1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$
2.	Получить характеристическое уравнение оператора A , для чего приравнять характеристический многочлен нулю	$(1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) = 0$
3.	Найти корни характеристического уравнения, разрешив его относительно неизвестного λ , полученные корни - собственные значения линейного оператора	$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 4.$
4.	Составить систему уравнений для определения собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_1 : $A_c - \lambda_1 E = 0$	$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ -4 & 4-1 & 0 \\ -2 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ -4x_1 + 3x_2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или}$ $\begin{cases} 0 = 0, \\ -4x_1 + 3x_2 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$
5.	Найти фундаментальную систему решений полученной системы линейных алгебраических уравнений (см. [3])	Из системы, ранг которой равен 2, находим значения переменных: $x_1 = \frac{3}{4}x_2,$ $x_3 = 2x_1 - x_2 = 0,5x_2,$ откуда фундаментальная система решений для собственного значения $\lambda_1 = 1$ состоит из одного вектора $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
6.	Составить систему уравнений для определения собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_2 : $A_c - \lambda_2 E = 0$	$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ -4 & 4-2 & 0 \\ -2 & 1 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или}$ $\begin{pmatrix} -x_1 \\ -4x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_1 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$
7.	Найти фундаментальную систему решений полученной системы линейных алгебраических уравнений	Из системы, ранг которой равен 2, находим значения переменных: $x_1 = 0$, $x_2 = 2x_1 = 0$, откуда фундаментальная система решений для собственного значения $\lambda_2 = 1$ состоит из одного вектора $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$
8.	Составить систему уравнений для определения собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_3 : $A_c - \lambda_3 E = 0$	$\begin{pmatrix} 1-4 & 0 & 0 \\ -4 & 4-4 & 0 \\ -2 & 1 & 2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или}$ $\begin{pmatrix} -3x_1 \\ -4x_1 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или}$ $\begin{cases} -3x_1 = 0, \\ -4x_1 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$
9.	Найти фундаментальную систему решений полученной системы линейных алгебраических уравнений	Из системы, ранг которой равен 2, находим значения переменных: $x_1 = 0$, $x_3 = 0,5(-2x_1 + x_2) = 0,5x_2$, откуда фундаментальная система решений для собственного значения $\lambda_3 = 1$ состоит из одного вектора $X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Собственные значения линейного оператора **A** равны $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 4$,
и собственные векторы, им соответствующие, равны

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{X}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задание 6.1

Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора **A**, имеющего в некотором базисе **e** = (**e**₁, **e**₂, **e**₃) матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.2

Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора A , имеющего в некотором базисе $e = (e_1, e_2, e_3)$ матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.3

Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\mathbf{A}$, имеющего в некотором базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.4

Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора **A**, имеющего в некотором базисе **e** = (**e**₁, **e**₂, **e**₃) матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.5

Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\mathbf{A}$, имеющего в некотором базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Пример выполнения упражнения на умение № 7.

Задание

Убедитесь, что в R^3 векторы $a_1 = (1, -2, 2)$, $a_2 = (-1, 0, 1)$, $a_3 = (5, -3, -7)$ образуют базис. С их помощью постройте ортонормированный базис $e = (e_1, e_2, e_3)$.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Составить матрицу A из координат векторов a_1, a_2, a_3 , записав в первый столбец матрицы координаты вектора a_1 , во второй - координаты вектора a_2 , в третий - координаты вектора a_3	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$
2.	Вычислить определитель матрицы A : $\det A$	$\det A = 13$
3.	Если матрица A удовлетворяет условию $\det A \neq 0$, то заданная система векторов образует базис в R^3 и может быть взята за исходную для построения ортонормированного базиса. В противном случае заданную систему векторов использовать для построения ортонормированного базиса нельзя.	$\det A = 13 \neq 0$, т.е. заданная система векторов линейно независима и может быть взята в качестве исходного базиса для построения ортонормированного.
4.	Вычислить векторы $g_1 = a_1$ и $e_1 = \frac{g_1}{\ g_1\ }$	$\begin{aligned} g_1 &= a_1 = (1, -2, 2), \\ e_1 &= \frac{g_1}{\ g_1\ } = \frac{(1, -2, 2)}{\sqrt{1+4+4}} = \\ &= \frac{(1, -2, 2)}{3} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
5.	Вычислить векторы $\mathbf{g}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{g}_2}{\ \mathbf{g}_2\ }$	$\mathbf{g}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_1 = (-1, 0, 1) - ((-1, 0, 1), \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) =$ $(-1, 0, 1) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) =$ $= (-1, 0, 1) - \left(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right) = \left(-\frac{10}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{7}{9}\right),$ $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{g}_2}{\ \mathbf{g}_2\ } = \left(-\frac{10}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{7}{9}\right) / \sqrt{\frac{100+4+49}{81}} =$ $= \frac{(-10, 2, 7)}{\sqrt{153}} = \frac{(-10, 2, 7)}{3\sqrt{17}} = \left(\frac{-10}{3\sqrt{17}}, \frac{2}{3\sqrt{17}}, \frac{7}{3\sqrt{17}}\right)$
6.	Вычислить векторы $\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{g}_3}{\ \mathbf{g}_3\ }$	$\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_1 = (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = (5, -3, -7) - ((5, -3, -7), \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)) \cdot$ $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - ((5, -3, -7), \left(\frac{-10}{3\sqrt{17}}, \frac{2}{3\sqrt{17}}, \frac{7}{3\sqrt{17}}\right)) \cdot$ $\left(\frac{-10}{3\sqrt{17}}, \frac{2}{3\sqrt{17}}, \frac{7}{3\sqrt{17}}\right) = (5, -3, -7) - \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) +$ $+ \left(-\frac{350}{51}, \frac{70}{17}, \frac{245}{17}\right) = \left(-\frac{78}{51}, -\frac{117}{51}, -\frac{78}{51}\right) =$ $= \left(-\frac{26}{17}, -\frac{39}{17}, -\frac{26}{17}\right) = -\frac{13}{17}(2, 3, 2);$ $\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{g}_3}{\ \mathbf{g}_3\ } = \frac{-\frac{13}{17}(2, 3, 2)}{\frac{13}{17}\sqrt{4+9+4}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}(2, 3, 2) =$ $= \left(\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$

Построенный базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, где $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$; $\mathbf{e}_2 = (\frac{-10}{3\sqrt{17}}, \frac{2}{3\sqrt{17}}, \frac{7}{3\sqrt{17}})$;
 $\mathbf{e}_3 = (-\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}})$ – ортонормированный базис.

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задание 7.1

Убедитесь, что в $\mathbb{R}^3$ векторы $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 1, 2)$ образуют базис. С их помощью постройте ортонормированный базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Задание 7.2

Убедитесь, что в $\mathbb{R}^3$ векторы $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 0, 1)$ образуют базис. С их помощью постройте ортонормированный базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Задание 7.3

Убедитесь, что в $\mathbb{R}^3$ векторы $\mathbf{a}_1 = (-3, \sqrt{8}, \sqrt{8})$, $\mathbf{a}_2 = (5, -1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (\sqrt{2}, 1, 1)$ образуют базис. С их помощью постройте ортонормированный базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Задание 7.4

Убедитесь, что в $\mathbb{R}^3$ векторы $\mathbf{a}_1 = (2, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (3, -1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (4, -2, 3)$ образуют базис. С их помощью постройте ортонормированный базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.



Задание 7.5

Убедитесь, что в $\mathbb{R}^3$ векторы $\mathbf{a}_1 = (2, 4, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, -1, 1)$ образуют базис. С их помощью постройте ортонормированный базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

8. Пример выполнения упражнения на умение № 8.

Задание

Приведите квадратичную форму $x^2 + 2y^2 + 2xz + 2yz$ к каноническому виду методом выделения квадратов.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Сгруппировать члены квадратичной формы, содержащие квадрат переменной x и ее произведение на какую-либо другую переменную, квадрат переменной y и ее произведение на переменную, отличную от x	$(x^2 + 2xz) + (2y^2 + 2yz)$
2.	Дополнить каждое из выражений, стоящих в скобках, до полного квадрата, вычтя из всего уравнения дополнительно прибавленные члены, чтобы оно не изменилось по сравнению с исходным видом квадратичной формы	$(x^2 + 2xz) + (2y^2 + 2yz) = (x^2 + 2xz + z^2) + (2(y^2 + yz + z^2/4)) - z^2 - 2z^2/4$
3.	Записать квадратичную форму в виде суммы квадратов, получившихся в результате преобразований	$(x + z)^2 + 2(y + z/2)^2 - 1,5z^2$
4.	Перейти к новым координатам, заменив каждое из выражений, возводимое в квадрат, на новую координату, получить канонический вид записи квадратичной формы	$x' = x + z, y' = y + z/2, z' = z$ и квадратичная форма запишется в каноническом виде: $(x')^2 + 2(y')^2 - 1,5(z')^2$

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задание 8.1

Приведите квадратичную форму $4x^2 + z^2 + 8xy + 4xz$ к каноническому виду методом выделения квадратов.

Задание 8.2

Приведите квадратичную форму $x^2 + 3y^2 + 4xy + 2xz + 2yz + z^2$ к каноническому виду методом выделения квадратов.

$$\begin{aligned}
 & x^2 + 3y^2 + 4xy + 2xz + 2yz + z^2 \\
 & (x+2z)^2 + (3y-4x)^2 + (2y+z)^2 \\
 & (x+y+z)^2 + (2y+4xy+x^2) - 2x^2 = (x+y+z)^2 + 2(x+y)^2 - 2x^2
 \end{aligned}$$

Задание 8.3

Приведите квадратичную форму $x^2 - y^2 + 2xy + 2xz$ к каноническому виду методом выделения квадратов.

Задание 8.4

Приведите квадратичную форму $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2xz + 4yz + 3z^2$ к каноническому виду методом выделения квадратов.

Задание 8.5

Приведите квадратичную форму $x^2 + 2y^2 + 4xz + 4yz$ к каноническому виду методом выделения квадратов.

9. Пример выполнения упражнения на умение № 9

Задание

Привести квадратичную форму $x^2 + 4xy + y^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Составить матрицу квадратичной формы	$A = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$
2.	Составить характеристическое уравнение для матрицы A и найти его корни (собственные значения квадратичной формы)	$ A - \lambda E = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0,5 \\ 0,5 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 0,25 =$ $= \lambda^2 - 2\lambda + 0,75 = 0,$ откуда $\lambda_1 = 1,5,$ $\lambda_2 = 0,5.$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
3.	Найти канонический вид квадратичной формы	Канонический вид квадратичной формы в новых переменных $1,5(x')^2 + 0,5(y')^2$.
4.	Найти собственные векторы, соответствующие собственным значениям	Собственные векторы находим из системы уравнений, соответствующей собственному значению $\lambda_1 = 1,5$: $\begin{cases} -0,5x_1 + 0,5x_2 = 0, \\ 0,5x_1 - 0,5x_2 = 0. \end{cases}$ Откуда $x_1 = x_2$ и собственный вектор $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Аналогично для $\lambda_2 = 0,5$ система уравнений имеет вид $\begin{cases} 0,5x_1 + 0,5x_2 = 0, \\ 0,5x_1 + 0,5x_2 = 0. \end{cases}$ Откуда $x_1 = -x_2$ и собственный вектор $X^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5.	Пронормировать собственные векторы	$\frac{X^{(1)}}{\ X^{(1)}\ } = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{X^{(2)}}{\ X^{(2)}\ } = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
6.	Составить из столбцов координат пронормированных собственных векторов матрицу ортонормированного преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду	$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, откуда $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ или $x' = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - y),$ $y' = \frac{1}{\sqrt{2}} (x + y).$

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задание 9.1

Привести квадратичную форму $-x^2 + 2xy - y^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.

$$-x^2 + 2xy - y^2$$

$$-(x-y)^2$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 9.2

Привести квадратичную форму $4x^2 + 4xy + 8yz - 3z^2 - 4xz$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Задание 9.3

Привести квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2 - 4/3xz - 8\sqrt{2}/3yz$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Задание 9.4

Привести квадратичную форму $-x^2 - y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz + 6yz$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Задание 9.5

Привести квадратичную форму $2x^2 + 8xy + 2y^2 + 2z^2 + 8xz - 8yz$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составьте логическую схему базы знаний по теме курса и перечень основных зависимостей и формул.

2. Решите самостоятельно следующие задачи:

Во всех заданиях a_1 равно количеству гласных букв в имени студента, a_2 – количеству согласных букв в имени студента, a_3 – количеству гласных букв в фамилии студента, a_4 – количеству согласных букв в фамилии студента.

Вариант 1

1. В линейном пространстве V^3 заданы три вектора $x_1 = (2, 3, a_1)$, $x_2 = (-1, 0, -a_2)$, $x_3 = (a_3, 2, 2)$. Выясните, является ли система этих векторов линейно зависимой. Если система линейно зависима, то найти зависимость между векторами (нулевую нетривиальную комбинацию векторов).

2. Найти координаты многочлена $P_3(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$ в базисе $1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$.

3. Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R^3 , если L задано уравнением $x_1 - a_2x_2 + a_3x_3 = 0$.

4. Найти размерность и базис линейной оболочки следующих векторов: $x_1 = (1, -a_1, 1)$, $x_2 = (a_2, -2, -1)$, $x_3 = (-1, -2, a_3)$.

5. Проверить, что векторы $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (3, -3, 4)$, $e_3 = (-2, 2, 3)$ образуют ортогональный базис, и для вектора $x = (a_1, a_2, a_3)$ найти разложение по этому базису.

6. Определить координаты векторов $A(v_i)$, $i = 1, 2, 3$, если линейный оператор, осуществляющий преобразование $A: R^3 \rightarrow R^3$, задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и векторы $v_1 = (a_1, -1, 1)$, $v_2 = (3, -2, -a_2)$, $v_3 = (-1, -a_3, -3)$.

7. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы некоторого линейного оператора $\begin{pmatrix} a_1 & 2 \\ 4 & a_2 \end{pmatrix}$.

8. Для симметрической матрицы квадратичной формы $a_2x^2 + a_3y^2 + a_4xy$ найти подобную ей диагональную матрицу $A' = P^{-1}AP$ и соответствующую ей ортогональную матрицу P . Является ли квадратичная форма положительно определенной?

Вариант 2

1. В линейном пространстве V^3 заданы три вектора $x_1 = (1, 4, a_1)$, $x_2 = (1, -1, a_2)$, $x_3 = (a_3, 1, -6)$. Выясните, является ли система этих векторов линейно зависимой. Если система линейно зависима, то найти зависимость между векторами (нулевую нетривиальную комбинацию векторов).

2. Найти координаты многочлена $P_3(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$ в базисе $1, (1+x), (1+x)^2, (1+x)^3$.

3. Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R^3 , если L задано уравнением $x_1 + a_3x_2 + a_4x_3 = 0$.

4. Найти размерность и базис линейной оболочки следующих векторов $x_1 = (7, a_1, -3)$, $x_2 = (a_2, 2, -4)$, $x_3 = (3, -3, a_3)$.

5. Проверить, что векторы $e_1 = (1, -1, 1)$, $e_2 = (3, 3, 0)$, $e_3 = (1, -1, -2)$ образуют ортогональный базис, и для вектора $x = (-a_1, a_2, a_3)$ найти разложение по этому базису.

6. Определить координаты векторов $A(v_i)$, $i = 1, 2, 3$, если линейный оператор, осуществляющий преобразование $A: R^3 \rightarrow R^3$, задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и векторы $v_1 = (a_1, 2, 1)$, $v_2 = (-2, 4, a_2)$, $v_3 = (3, -a_3, -3)$.

7. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы некоторого линейного оператора $\begin{pmatrix} a_3 & 3 \\ 1 & a_4 \end{pmatrix}$.

8. Для симметрической матрицы квадратичной формы $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3x$ найти подобную ей диагональную матрицу $A' = P^{-1}AP$ и соответствующую ей ортогональную матрицу P . Является ли квадратичная форма положительной определенной?

✓ Вариант 3 Контрольные

✓ 1. В линейном пространстве V^3 заданы три вектора $x_1 = (2, 1, a_1)$, $x_2 = (-5, 0, a_2)$, $x_3 = (a_3, 4, 3)$. Выясните, является ли система этих векторов линейно зависимой. Если система линейно зависима, то найти зависимость между векторами (нулевую нетривиальную комбинацию векторов).

2. Найти координаты многочлена $P_3(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$ в базисе $1, (x-2), (x-2)^2, (x-2)^3$.

3. Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R^3 , если L задано уравнением $x_1 - a_1x_2 + a_2x_3 = 0$.

4. Найти размерность и базис линейной оболочки следующих векторов $x_1 = (1, a_1, 1)$, $x_2 = (a_2, 2, 3)$, $x_3 = (1, 2, a_3)$.

✓ 5. Проверить, что векторы $e_1 = (2, 1, -2)$, $e_2 = (-1, 4, 1)$, $e_3 = (1, 0, 1)$ образуют ортогональный базис, и для вектора $x = (a_1, a_2, a_3)$ найти разложение по этому базису.

6. Определить координаты векторов $A(v_i)$, $i = 1, 2, 3$, если линейный оператор, осуществляющий преобразование $A: R^3 \rightarrow R^3$, задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и векторы $v_1 = (a_1, 2, 3)$, $v_2 = (-1, 2, -a_2)$, $v_3 = (4, -a_3, 1)$.

7. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы некоторого

линейного оператора $\begin{pmatrix} a_1 & 5 \\ 4 & a_3 \end{pmatrix}$.

8. Для симметрической матрицы квадратичной формы $a_2x^2 + a_3y^2 + a_4xy$ найти подобную ей диагональную матрицу $A' = P^{-1}AP$ и соответствующую ей ортогональную матрицу P . Является ли квадратичная форма положительно определенной?

Вариант 4

1. В линейном пространстве V^3 заданы три вектора $x_1 = (5, 3, a_1)$, $x_2 = (-1, -6, -a_2)$, $x_3 = (a_3, -1, 1)$. Выясните, является ли система этих векторов линейно зависимой. Если система линейно зависима, то найти зависимость между векторами (нулевую нетривиальную комбинацию векторов).

2. Найти координаты многочлена $P_3(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$ в базисе 1, $(x+2)$, $(x+2)^2$, $(x+2)^3$.

3. Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R^3 , если L задано уравнением $x_1 - a_1x_2 + a_3x_3 = 0$.

4. Найти размерность и базис линейной оболочки следующих векторов: $x_1 = (1, -a_3, 1)$, $x_2 = (a_2, 3, -1)$, $x_3 = (-1, -2, a_4)$.

5. Проверить, что векторы $e_1 = (1, -2, 0)$, $e_2 = (0, 0, 4)$, $e_3 = (2, 1, 0)$ образуют ортогональный базис, и для вектора $x = (a_1, a_2, a_3)$ найти разложение по этому базису.

6. Определить координаты векторов $A(v_i)$, $i = 1, 2, 3$, если линейный оператор, осуществляющий преобразование $A: R^3 \rightarrow R^3$, задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

и векторы $v_1 = (a_1, -4, 1)$, $v_2 = (1, -2, -a_2)$, $v_3 = (3, -a_3, -1)$.

7. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы некоторого

линейного оператора $\begin{pmatrix} a_1 & 3 \\ 2 & a_2 \end{pmatrix}$.

8. Для симметрической матрицы квадратичной формы $a_1x^2 + a_3y^2 + a_4xy$ найти подобную ей диагональную матрицу $A' = P^{-1}AP$ и соответствующую ей ортогональную матрицу P . Является ли квадратичная форма положительно определенной?

Вариант 5

1. В линейном пространстве V^3 заданы три вектора $x_1 = (5, -6, a_1)$, $x_2 = (3, -5, -a_2)$, $x_3 = (a_3, -1, 3)$. Выясните, является ли система этих векторов линейно зависимой. Если система линейно зависима, то найти зависимость между векторами (нулевую нетривиальную комбинацию векторов).

2. Найти координаты многочлена $P_3(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$ в базисе 1, $(2x-1)$, $(2x-1)^2$, $(2x-1)^3$.

3. Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R^3 , если L задано уравнением $x_1 - a_2x_2 + a_4x_3 = 0$.

4. Найти размерность и базис линейной оболочки следующих векторов: $x_1 = (1, -a_1, 5)$, $x_2 = (a_2, -2, -3)$, $x_3 = (-4, 2, a_3)$.

5. Проверить, что векторы $e_1 = (2, 3, 5)$, $e_2 = (2, -3, 1)$, $e_3 = (-9, -4, 6)$ образуют ортогональный базис, и для вектора $x = (a_1, a_2, a_3)$ найти разложение по этому базису.

6. Определить координаты векторов $A(v_i)$, $i = 1, 2, 3$, если линейный оператор, осуществляющий преобразование $A: R^3 \rightarrow R^3$, задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и векторы $v_1 = (a_1, 1, -1)$, $v_2 = (1, -1, a_2)$, $v_3 = (-1, -a_3, -2)$.

7. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы некоторого линейного оператора $\begin{pmatrix} a_3 & 6 \\ 2 & a_4 \end{pmatrix}$.

8. Для симметрической матрицы квадратичной формы $a_2x^2 + a_1y^2 + a_3xy$ найти подобную ей диагональную матрицу $A' = P^{-1}AP$ и соответствующую ей ортогональную матрицу P . Является ли квадратичная форма положительно определенной?

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ЮНИТА 2

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ЧАСТЬ II

Редактор Н.М. Пилипенко
Оператор компьютерной верстки Д.В. Федотов

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998
НОУ "Современный Гуманитарный Институт"
Тираж 4000.

Сдано в печать 11.07.01 г.
Заказ 2416.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

